参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	B	B	C	D	C	A	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．-160　12．2.6　13．$\dfrac{7}{8}$　14．-1，-2，-3（答案不唯一）　15．②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 4 名同学观看的影片均不相同，

所以不同的选择方法共有 $\mathrm{A}_4^4=24$ 种.

（Ⅱ）因为甲、乙 2 名同学选择观看的影片已确定，

所以不同的选择方法共有 $4\times4=16$ 种.

（Ⅲ）因为恰有 2 名同学选择观看同一部影片，

所以不同的选择方法共有 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_4^1\ \mathrm{A}_3^2=6\times4\times6=144$ 种.

17．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 $A=$“甲球员上场参加比赛时，该球队获胜”，

则 $P(A)=\dfrac{40}{40+5}=\dfrac{8}{9}$.

（Ⅱ）表中该球队未获胜的场次共有 $5+3=8$ 场，其中甲球员上场的场次有 5 场，未上场的场次有 3 场，

则 ξ 的可能取值为 0，1，2，3.

$$P(\xi=0)=\frac{C_3^0C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28},\quad P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56},\quad P(\xi=3)=\frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\frac{1}{56}.$$

所以 ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

所以 $E(\xi)=0\times\dfrac{5}{28}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{15}{56}+3\times\dfrac{1}{56}=\dfrac{9}{8}$.

18．（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-2x(2x+1)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$，

所以 $f'(1)=0$.

因为 $f(1)=1$，所以切点为 $(1,1)$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=-\dfrac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$，$x\in\mathbf{R}$.

令 $f'(x)>0$，得 $-2<x<1$，

令 $f'(x)<0$，得 $x<-2$ 或 $x>1$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-2,1)$，

单调递减区间为 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$.

所以 $f(x)$ 有极小值为 $f(-2)=-\dfrac{1}{2}$，极大值为 $f(1)=1$.

19.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）设事件 $E=$“仅使用 A 款软件的全体用户对所使用软件的满意度为‘非常满意’”，

事件 $F=$“仅使用 B 款软件的全体用户对所使用软件的满意度为‘非常满意’”，

则 $P(E)=\dfrac{300}{500}=\dfrac{3}{5}$，$P(F)=\dfrac{250}{500}=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）设事件 $C=$“这 3 人中恰有 1 人对所使用软件的满意度为‘非常满意’”，

则 $P(C)=C_2^1\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{25}$.

（Ⅲ）$D(X)<D(Y)$.

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $f'(x)=2\ln(-x)+\dfrac{2x+1}{x}-a=2\ln(-x)+\dfrac{1}{x}+2-a$，

设 $g(x)=2\ln(-x)+\dfrac{1}{x}+2-a$，$x\in[-1,0)$，

因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,0)$ 上单调递减，

所以 $x\in[-1,0)$ 时，$g(x)\le 0$ 恒成立.

因为 $x\in[-1,0)$ 时，$g'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}<0$，

所以$g\left(x\right)$在区间$\left[-1,0\right)$上单调递减，

所以$g\left(x\right)$的最大值为$g\left(-1\right)=1-a\le 0$，即$a\ge 1$.

当$a=1$时，符合题意.

所以$a\ge 1$.

（Ⅱ）当$a=-1$时，$f\left(x\right)=\left(2x+1\right)\ln\left(-x\right)+x$，$x<0$，

则$f'\left(x\right)=2\ln\left(-x\right)+\dfrac{2x+1}{x}+1=2\ln\left(-x\right)+\dfrac{1}{x}+3$.

设$h\left(x\right)=2\ln\left(-x\right)+\dfrac{1}{x}+3,x<0$，则$h'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}<0$，

所以$h\left(x\right)$在区间$\left(-\infty,0\right)$上单调递减.

因为$h\left(-1\right)=2>0$，$h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1-2\ln 2<0$，

所以$\exists x_0\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$，使得$h\left(x_0\right)=2\ln\left(-x_0\right)+\dfrac{1}{x_0}+3=0$，

即$\ln\left(-x_0\right)=-\dfrac{3x_0+1}{2x_0}$.

当x变化时，$h\left(x\right)$，$f'\left(x\right)$，$f\left(x\right)$的变化如下表：

x	$\left(-\infty,x_0\right)$	x_0	$\left(x_0,0\right)$
$h\left(x\right)$	+	0	－
$f''\left(x\right)$	+	0	－
$f\left(x\right)$	单调递增	极大值$f\left(x_0\right)$	单调递减

所以$f\left(x\right)$的最大值为$f\left(x_0\right)=\left(2x_0+1\right)\ln\left(-x_0\right)+x_0$

$=-\dfrac{\left(3x_0+1\right)\left(2x_0+1\right)}{2x_0}+x_0$

$=-\dfrac{\left(4x_0+1\right)\left(x_0+1\right)}{2x_0}$.

因为$x_0\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$，所以$4x_0+1<0$，$x_0+1>0$，

所以$f\left(x_0\right)<0$，故$f\left(x\right)<0$.

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）所有的集合B为$\left\{2,4\right\}$，$\left\{3,4\right\}$，$\left\{3,5\right\}$.

（Ⅱ）记“对任意不相等的a_1，$a_2 \in A$，都有$a_1+a_2 \notin A$”为条件①，

记“对任意不相等的b_1，$b_2 \in B$，都有$b_1b_2 \notin B$”为条件②.

由条件②得$1 \in A$.

由$2 \in B$，$3 \in B$和条件②得$2\times3=6 \notin B$，即$6 \in A$.

由条件①得$6-1=5 \notin A$，即$5 \in B$.

由条件②得$2\times5=10 \notin B$，即$10 \in A$.

由条件①得$10-6=4 \notin A$，即$4 \in B$.

由条件②得$2\times4=8 \notin B$，即$8 \in A$.

由条件①得$8+6=14 \notin A$，即$14 \in B$.

由条件①得$8-1=7 \notin A$，即$7 \in B$.

由条件②得$2\times7=14 \notin B$，与$14 \in B$矛盾，

所以$14 \notin M$，即$n<14$.............. 8 分

（Ⅲ）n的最大值为32．证明如下：

一方面，当$n=32$时，可构造集合$A=\{1,2,4,7,10,15,18,24,27,30\}$，

$B=\{3,5,6,8,9,11,12,13,14,16,17,19,20,21,22,23,25,26,28,29,31,32\}$具有性质$P$；

另一方面，当$n \geq 33$时，可证明不存在具有性质P的集合A，B．证明如下：

由（Ⅱ）知，$1 \in A$，且当$2 \in B$，$3 \in B$时，$n<14$，

此时不存在具有性质P的集合A，B.

由条件①得 2，3 不能同时属于集合A.

下面讨论 2 和 3 一个属于集合A，一个属于集合B的情况：

（1）当$3 \in A$，$2 \in B$时，由条件①得$1+3=4 \notin A$，即$4 \in B$.

由条件②得$2\times4=8 \notin B$，即$8 \in A$.

由条件①得$8-3=5 \notin A$，$8-1=7 \notin A$即$5 \in B$，$7 \in B$.

因为$2 \in B$，$4 \in B$，$5 \in B$，$7 \in B$，

由条件②得$2\times7=14 \notin B$，$4\times5=20 \notin B$，

即$14 \in A$，$20 \in A$.

由条件①得$14-8=6 \notin A$，$20-8=12 \notin A$，即$6 \in B$，$12 \in B$.

由条件②得$2\times6=12 \notin B$，与$12 \in B$矛盾，此时不存在具有性质P的集合A，B.

（2）当$2 \in A$，$3 \in B$时，由条件②得 4，5 不能同时属于集合A，下面分三种情形：

情形一：若$4 \in A$，$5 \in B$，由条件①得$2+4=6 \notin A$，即$6 \in B$.

由条件②得$3\times5=15 \notin B$，$3\times6=18 \notin B$，即$15 \in A$，$18 \in A$.

由条件①得$15+18=33 \notin A$，即$33 \in B$.

由条件①得$15-4=11 \notin A$，即$11 \in B$.

由条件②得$3\times 11=33\notin B$，与$33\in B$矛盾，此时不存在具有性质P的集合A，B.

情形二：若$5\in A$，$4\in B$，由条件①得$1+5=6\notin A$，$2+5=7\notin A$，即$6\in B$，$7\in B$.

由条件②得$4\times 7=28\notin B$，即$28\in A$.

由条件①得$5+28=33\notin A$，即$33\in B$.

由条件②得$3\times 4=12\notin B$，即$12\in A$.

由条件①得$12-1=11\notin A$，即$11\in B$.

由条件②得$3\times 11=33\notin B$，与$33\in B$矛盾，此时不存在具有性质P的集合A，B.

情形三：若$4\in B$，$5\in B$，由条件②得$4\times 5=20\notin B$，即$20\in A$.

由条件①得$20-2=18\notin A$，即$18\in B$.

由条件②得$18\div 3=6\notin B$，即$6\in A$.

由条件①得$1+6=7\notin A$，即$7\in B$.

由条件②得$3\times 7=21\notin B$，即$21\in A$.

由条件②得$3\times 5=15\notin B$，即$15\in A$.

由条件①得$6+15=21\notin A$，与$21\in A$矛盾，

此时不存在具有性质P的集合A,B.

综上，n的最大值为32.