

# 2024 北京丰台高二（下）期末

## 数 学

2024.07

考生 须知	<p>1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、班级、姓名、教育 ID 号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的教育 ID 号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。</p> <p>2. 本次练习所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。</p> <p>3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在练习卷、草稿纸上答题无效。</p> <p>4. 本练习卷满分共 150 分，作答时长 120 分钟。</p>
----------	--

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{x | 0 < x \leq 4\}$ ， $B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ ，则  $A \cup B =$  ( )

A.  $(0, 3]$     B.  $[0, 3]$     C.  $[-1, 0) \cup (0, 4]$     D.  $[-1, 4]$

2. 在一般情况下，下列各组的两个变量呈正相关的是 ( )

A. 某商品的销售价格与销售量    B. 汽车匀速行驶时的路程与时间  
C. 气温与冷饮的销售量    D. 人的年龄与视力

3. 已知命题  $p: \exists x > 1, x^2 + 1 > 0$ ，则  $\neg p$  是 ( )

A.  $\forall x > 1, x^2 + 1 > 0$     B.  $\forall x > 1, x^2 + 1 \leq 0$   
C.  $\exists x > 1, x^2 + 1 \leq 0$     D.  $\exists x \leq 1, x^2 + 1 \leq 0$

4. 已知复数  $z = \frac{1}{1-i}$ ，则它的共轭复数  $\bar{z} =$  ( )

A.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$     B.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$     C.  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$     D.  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

5. 下列求导运算错误的是 ( )

A.  $(2x^3 - 3x^2 + 5)' = 6x^2 - 6x$     B.  $(\cos 2x)' = -\sin 2x$

C.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$     D.  $(xe^x)' = (x+1)e^x$

6. 已知复数  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ), 则 “ $x = 0$ ” 是 “复数  $z$  对应的点在虚轴上” 的 ( )

- A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

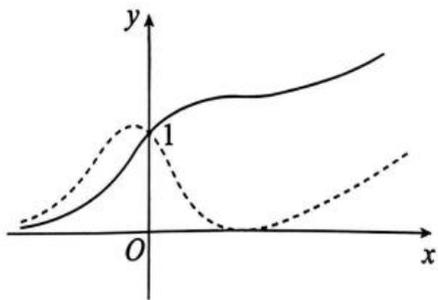
7. 已知函数  $f(x) = 3x^2 - \cos x$ , 则 ( )

- A.  $f(-3) < f(e) < f(\pi)$     B.  $f(\pi) < f(e) < f(-3)$   
C.  $f(\pi) < f(-3) < f(e)$     D.  $f(e) < f(-3) < f(\pi)$

8. 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $ab = a + b + 3$ , 则  $ab$  的最小值为 ( )

- A. 1    B. 3    C. 9    D. 10

9. 在同一平面直角坐标系  $xOy$  内, 函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的图象如图所示. 已知这两个函数图象恰有一个公共点, 其坐标为  $(0, 1)$ , 则 ( )



- A. 函数  $y = \frac{f(x)}{e^x}$  的最大值为 1    B. 函数  $y = \frac{f(x)}{e^x}$  的最小值为 1

- C. 函数  $y = e^x f(x)$  的最大值为 1    D. 函数  $y = e^x f(x)$  的最小值为 1

10. 甲、乙、丙、丁、戊共 5 名同学进行数学建模比赛, 决出了第 1 名到第 5 名的名次 (无并列情况). 甲、乙、丙去询问成绩. 老师对甲说: “你不是最差的.” 对乙说: “很遗憾, 你和甲都没有得到冠军.” 对丙说: “你不是第 2 名.” 从这三个回答分析, 5 名同学可能的名次排列情况种数为 ( )

- A. 44    B. 46    C. 52    D. 54

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11.  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项是\_\_\_\_\_.

12. 已知线性相关的两个变量  $x$  和  $y$  的取值如下表, 且经验回归方程为  $\hat{y} = 0.95x + \hat{a}$ , 则  $\hat{a} =$  \_\_\_\_\_.

$x$	0	1	3	4
$y$	2.2	4.3	4.8	6.7

13. 某校举办 “品味 ‘蔬’ 香, ‘勤’ 满校园” 蔬菜种植活动. 某小组种植的番茄出芽率 (出芽的种子数占总种子数的百分比) 为 80%, 出苗率 (出苗的种子数占总种子数的百分比) 为 70%. 若该小组种植的其中一颗种子已经出芽, 则它出苗的概率为\_\_\_\_\_.

14. 能够说明“设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a > b > c$ , 则  $a + b > c$ ”是假命题的一组实数  $a, b, c$  的值依次为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = e^x(ax^2 - x - 1)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ). 给出下列四个结论:

①当  $a = 1$  时, 若  $f(x)$  的图象与直线  $y = m$  恰有三个公共点, 则  $m$  的取值范围是  $\left(-e, \frac{5}{e^2}\right)$ ;

②若  $f(x)$  在  $x = -2$  处取得极小值, 则  $a$  的取值范围是  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ;

③  $\forall a \in \mathbf{R}$ , 曲线  $y = f(x)$  总存在两条互相垂直的切线;

④若  $f(x)$  存在最小值, 则  $a$  的取值范围是  $(0, +\infty)$ .

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题共 14 分)

2024 年春节期间, 全国各大影院热映《第二十条》、《飞驰人生 2》、《热辣滚烫》、《熊出没·逆转时空》4 部优秀的影片. 现有 4 名同学, 每人选择这 4 部影片中的 1 部观看.

(I) 如果这 4 名同学选择观看的影片均不相同, 那么共有多少种不同的选择方法?

(II) 如果这 4 名同学中的甲、乙 2 名同学分别选择观看影片《第二十条》、《飞驰人生 2》, 那么共有多少种不同的选择方法?

(III) 如果这 4 名同学中恰有 2 名同学选择观看同一部影片, 那么共有多少种不同的选择方法?

17. (本小题共 13 分)

在上个赛季的所有比赛中, 某支篮球队的胜负情况及该球队甲球员的上场情况如下表:

		胜负情况	
		获胜	未获胜
甲球员上场情况	上场	40 场	5 场
	未上场	2 场	3 场

(I) 求甲球员上场时, 该球队获胜的概率;

(II) 从表中该球队未获胜的所有场次中随机选取 3 场, 记  $\xi$  为甲球员未上场的场数, 求  $\xi$  的分布列和数学期望  $E(\xi)$ .

18. (本小题共 14 分)

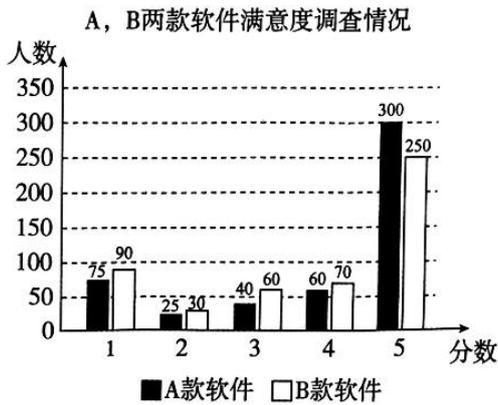
已知函数  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 求  $f(x)$  的极值.

19. (本小题共 14 分)

随着科技的不断发展，人工智能技术在人类生产生活中的应用越来越广泛。为了解用户对  $A$ ， $B$  两款人机交互软件（以下简称软件）的满意度，某平台随机选取了仅使用  $A$  款软件的用户和仅使用  $B$  款软件的用户各 500 人，采用打分方式进行调查，情况如下图：



根据分数把用户的满意度分为三个等级，如下表：

分数	5	4	$\leq 3$
满意度	非常满意	满意	不满意

假设用频率估计概率，且所有用户的打分情况相互独立。

(I) 分别估计仅使用  $A$  款软件的全体用户和仅使用  $B$  款软件的全体用户对所使用软件的满意度为“非常满意”的概率；

(II) 从仅使用  $A$  款软件的全体用户中随机选取 2 人，从仅使用  $B$  款软件的全体用户中随机选取 1 人，估计这 3 人中恰有 1 人对所使用软件的满意度为“非常满意”的概率；

(III) 从仅使用  $A$ ， $B$  两款软件的全体用户中各随机选取 10 人进行电话回访，记  $X$  为仅使用  $A$  款软件的 10 人对所使用软件的满意度为“不满意”的人数， $Y$  为仅使用  $B$  款软件的 10 人对所使用软件的满意度为“不满意”的人数，试比较  $X$ ， $Y$  的方差  $D(X)$ ， $D(Y)$  的大小。（结论不要求证明）

20. (本小题共 15 分)

已知函数  $f(x) = (2x+1)\ln(-x) - ax$  ( $a \in \mathbf{R}$ )。

(I) 若  $f(x)$  在区间  $[-1, 0)$  上单调递减，求  $a$  的取值范围；

(II) 当  $a = -1$  时，求证： $f(x) < 0$ 。

21. (本小题共 15 分)

已知集合  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ，且  $n \geq 4$ )。若集合  $A$ ， $B$  同时满足下列两个条件，则称集合  $A$ ， $B$  具有性质  $P$ 。

条件 (1):  $A \cap B = \emptyset$ ， $A \cup B = M$ ，且  $A$ ， $B$  都至少含有两个元素；

条件 (2): 对任意不相等的  $a_1, a_2 \in A$ ，都有  $a_1 + a_2 \notin A$ ，对任意不相等的  $b_1, b_2 \in B$ ，都有  $b_1 b_2 \notin B$ 。

(I) 当  $n = 5$  时，若集合  $A$ ， $B$  具有性质  $P$ ，且集合  $A$  中恰有三个元素，试写出所有的集合  $B$ ；

(II) 若集合  $A$ ， $B$  具有性质  $P$ ，且  $2 \in B$ ， $3 \in B$ ，求证： $n < 14$ ；

(III) 若存在集合  $A$ ,  $B$  具有性质  $P$ , 求  $n$  的最大值.