通州区 2023—2024 学年第二学期高二年级期末质量检测

数学试卷

2024 年 7 月

本试卷共 4 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，请将答题卡交回．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2<4\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $\{-3,3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-3,-2,2,3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】解不等式化简集合 A，再利用补集的定义求解即得.

【详解】依题意，$A=\{x\in \mathbf{Z} \mid -2<x<2\}=\{-1,0,1\}$，而 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，

所以 $\complement_U A=\{-3,-2,2,3\}$.

故选：D

2. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　B. $f(x)=(x-1)^2$　　C. $f(x)=\lg x$　　D. $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x$

【答案】C

【解析】

【分析】利用幂函数、二次函数单调性判断 AB；利用指数、对数函数单调性判断 CD.

【详解】对于 A，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，A 不是；

对于 B，函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，B 不是；

对于 C，函数 $f(x)=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，C 是；

对于 D，函数 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，D 不是.

故选：C

3. 已知 $a=\lg\frac{1}{2}$，$b=3^{0.1}$，$c=\sqrt{3}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $c<b<a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指数函数、对数函数的性质判断即可.

【详解】因为 $a=\lg\frac{1}{2}<\lg 1=0$，$c=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}>3^{0.1}>3^{0}=1$，

即 $a<0$，$c>b>1$，

所以 $c>b>a$.

故选：A

4. 设 A，B 为两个随机事件，若 $P(B|A)=\frac{1}{2}$，$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，则 $P(A|B)=$（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件概率公式可得 $P(AB)=\frac{1}{5}$，进而利用条件概率公式代入求解.

【详解】由条件概率可得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(AB)=\frac{1}{5}$，

所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$，

故选：B

5. 已知 $a>0$，$b>0$，则“$ab=1$”是“$a+b\geq 2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件，利用充分条件、必要条件的定义，结合基本不等式判断即可.

【详解】由 $a>0$，$b>0$，$ab=1$，得 $a+b\geq 2\sqrt{ab}=2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，

反之，$a>0$，$b>0$，$a+b\geq 2$，取 $a=2,b=1$，则 $ab=2\neq 1$，

所以“$ab=1$”是“$a+b\ge 2$”的充分不必要条件.

故选：A

6. 在$(x-2)^{10}$的展开式中，x^6的系数为（　　）

A. $-64C_{10}^{6}$　　B. $64C_{10}^{6}$　　C. $-16C_{10}^{4}$　　D. $16C_{10}^{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用二项式定理展开式的通项公式可求答案.

【详解】因为$(x-2)^{10}$的通项公式为$T_{r+1}=C_{10}^{r}x^{10-r}\left(-2\right)^{r}$，

令$10-r=6$得$r=4$，所以x^6的系数为$16C_{10}^{4}$.

故选：D.

7. 有两台车床加工同一型号零件，第 1 台加工的次品率为4%，第 2 台加工的次品率为5%，将两台车床加工出来的零件混放在一起，已知第 1 台，第 2 台车床加工的零件占比分别为40%，60%，现任取一件零件，则它是次品的概率为（　　）

A. 0.044　　B. 0.046　　C. 0.050　　D. 0.090

【答案】B

【解析】

【分析】根据全概率公式计算可得.

【详解】记现任取一件零件它是次品为事件A，

则$P\left(A\right)=4\%\times 40\%+5\%\times 60\%=0.046$.

故选：B

8. 某工厂生产一种产品需经过一，二，三，四共 4 道工序，现要从A，B，C，D，E，F这 6 名员工中选出 4 人，安排在 4 道工序上工作（每道工序安排一人），如果员工 A 不能安排在第四道工序，则不同的安排方法共有（　　）

A. 360 种　　B. 300 种　　C. 180 种　　D. 120 种

【答案】B

【解析】

【分析】从 6 人中任取 4 人安排工作，去掉A安排在第四道工序工作的安排方法数即得.

【详解】从 6 名员工中任选 4 人，安排在 4 道工序上工作的安排方法数为A_6^4种，

其中员工A在第四道工序工作的安排方法数为A_5^3种，

所以不同的安排方法共有$A_6^4-A_5^3=300$（种）.

故选：B

9. 设函数$f\left(x\right)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，若曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(2,4\right)$处的切线的斜率为10，则$f'\left(-2\right)+f\left(-2\right)=$（　　）

A. -16　　　　B. -6　　　　C. 6　　　　D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】利用奇函数性质求出$P(-2)$，再利用复合函数求导求出$f'(-2)$即可.

【详解】由函数$f\left(x\right)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，得$f(-x)=-f(x)$，则$f(-2)=-f(2)=-4$，

两边求导得$-f'(-x)=-f'(x)$，即$f'(-x)=f'(x)$，而$f'(2)=10$，则$f'(-2)=f'(2)=10$，

所以$f'\left(-2\right)+f\left(-2\right)=6$.

故选：C

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x},x>0\\ x^2+2x,x\le 0\end{cases}$；若方程$f(x)=a$恰有三个根，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$　　　　B. $[0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}]$　　　　C. $(-1,\dfrac{1}{e})$　　　　D. $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})\cup\{-1\}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合导数分析函数$f(x)$的性质，在同一坐标系内作出直线$y=a$与函数$y=f(x)$的图象，数形结合求出范围.

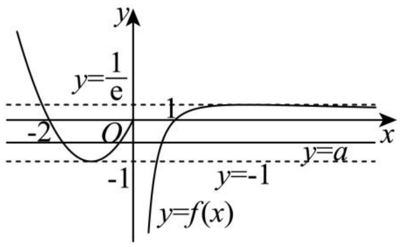
【详解】当$x\le 0$时，$f(x)=(x+1)^2-1$，函数$f(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递减，在$[-1,0]$上单调递增，

当$x>0$时，$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\ln x}{x}}$，求导得$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

由$f'(x)>0$，得$0<x<\mathrm{e}$，由$f'(x)<0$，得$x>\mathrm{e}$，即函数$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上递减，

当$x=\mathrm{e}$时，$f(x)$取得极大值$f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，且当$x>1$时，$f(x)>0$恒成立，

在同一坐标系内作出直线$y=a$与函数$y=f(x)$的图象，如图，



观察图象知，当$-1<a<\frac{1}{e}$时，直线$y=a$与函数$y=f(x)$的图象有3个公共点，即方程$f(x)=a$恰有三个根，

所以实数a的取值范围是$(-1,\frac{1}{e})$.

故选：C

【点睛】思路点睛：研究方程根的情况，可以通过转化，利用导数研究函数的单调性、最值等，借助数形结合思想分析问题，使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现.

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 函数$f\left(x\right)=\lg x+\sqrt{1-x}$的定义域是____________.

【答案】$\left(0,1\right]$

【解析】

【分析】根据对数的真数大于零，偶次方根的被开方数非负得到不等式组，解得即可.

【详解】对于函数$f\left(x\right)=\lg x+\sqrt{1-x}$，则$\begin{cases}x>0\\1-x\geq 0\end{cases}$，解得$0<x\leq 1$，

所以$f\left(x\right)=\lg x+\sqrt{1-x}$的定义域为$\left(0,1\right]$.

故答案为：$\left(0,1\right]$

12. 不等式$x^{2}-x-12>0$的解集是____________.

【答案】$\left(-\infty,-3\right)\cup\left(4,+\infty\right)$

【解析】

【分析】根据一元二次不等式求解即可.

【详解】因为$x^{2}-x-12=\left(x-4\right)\left(x+3\right)>0$，

所以$x>4$或$x<-3$.

故答案为：$\left(-\infty,-3\right)\cup\left(4,+\infty\right)$

13. 某区高二年级 4000 名学生的期中检测的数学成绩服从正态分布 $N\left(90,15^2\right)$，则成绩位于 $[90,105]$ 的人数大约是________.

（参考数据： $P\left(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma\right) \approx 0.6827$， $P\left(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma\right) \approx 0.9545$）

【答案】1365

【解析】

【分析】利用正态分布的对称性求出成绩在 $[90,105]$ 的概率，再求出对应的人数.

【详解】令高二年级 4000 名学生的期中检测的数学成绩为 X，则 $X \sim N(90,15^2)$，其中 $\mu=90,\sigma=15$，

则 $P(90 \leq X \leq 105)=P(\mu \leq X \leq \mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx \dfrac{1}{2}\times 0.6827=0.34135$，

所以成绩位于 $[90,105]$ 的人数大约是 $0.34135\times 4000 \approx 1365$.

故答案为：1365

14. 已知命题 P： 函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+a,x\leq 0\\ \sqrt{x}+b,x>0\end{cases}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数．能说明 P 为假命题的一组 a， b 的值为 $a=$________， $b=$________.

【答案】 ①. 2 ②. 0（答案不唯一，满足 $a>b$ 均可）

【解析】

【分析】利用分段函数的单调性，求出命题 P 为真命题时 a,b 即可得解.

【详解】函数 $y=-x^2+a$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增， $y=\sqrt{x}+b$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

则由函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+a,x\leq 0\\ \sqrt{x}+b,x>0\end{cases}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，得 $b\geq a$，

即命题 P 为真命题时， $a\leq b$，因此 P 为假命题时， $a>b$，

能说明 P 为假命题的一组 a， b 的值可以为 $a=2$， $b=0$.

故答案为：2；0

15. 已知函数 $f(x)=|\ln x|+b$，关于以下四个结论：

①函数 $f(x)$ 的值域为 $[b,+\infty)$；

②当 $a>b$ 时，方程 $f(x)=a$ 有两个不等实根；

③当 $b=0$， $a>0$ 时，设方程 $f(x)=a$ 的两个根为 x_1， x_2，则 x_1+x_2 为定值；

④当$b=0$，$a>0$时，设方程$f(x+1)=a$的两个根为x_1，x_2，则$x_1x_2+x_1+x_2=0$.

则所有正确结论的序号为________________.

【答案】①②④

【解析】

【分析】分析函数$f(x)$的性质求出值域判断①；求出方程的根依次判断②③④即得.

【详解】对于①，函数$f(x)=|\ln x|+b$，由于$|\ln x|\geq 0$，故$f(x)\geq b$，

因此函数$f(x)$的值域为$[b,+\infty)$，①正确；

对于②，当$a>b$时，方程$f(x)=a \Leftrightarrow |\ln x|=a-b$，解得$x=e^{b-a}$或$x=e^{a-b}$，

而$0<e^{b-a}<1<e^{a-b}$，方程$f(x)=a$有两个不等实根，②正确；

对于③，当$a>0$时，$|\ln x|=a$，不妨令$x_1=e^{-a}$，$x_2=e^{a}$，则$x_1<1<x_2$，

则$x_1+x_2=e^{-a}+e^{a}=\dfrac{1}{e^{a}}+e^{a}$，由于$y=t+\dfrac{1}{t}$在$(1,+\infty)$上单调递增，

故x_1+x_2随e^{a}的增大而增大，③错误；

对于④，当$a>0$时，$|\ln(x+1)|=a$，不妨令$x_1=e^{-a}-1$，$x_2=e^{a}-1$，

则$x_1x_2+x_1+x_2=(x_1+1)(x_2+1)-1=e^{-a}\cdot e^{a}-1=0$，④正确，

所以所有正确结论的序号为①②④.

故答案为：①②④

【点睛】方法点睛：函数零点个数判断方法：①直接法：直接求出$f(x)=0$的解；②图象法：作出函数$f(x)$的图象，观察与x轴公共点个数或者将函数变形为易于作图的两个函数，作出这两个函数的图象，观察它们的公共点个数.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

16. 已知函数$f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}(a,b\in\mathbf{R})$.

（1）若函数$f(x)$为奇函数，求实数a的值；

（2）当$a=2$，$b=1$时，求函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的最小值.

【答案】（1）0；　　（2）4.

【解析】

【分析】（1）利用奇函数的定义求出a的值.

（2）利用基本不等式求出最小值即得.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，

由于 $f(x)$ 为奇函数，则对于定义域内任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，

即 $\dfrac{(-x)^2+a(-x)+b}{-x}=-\dfrac{x^2+ax+b}{x}$，即 $2ax=0$ 恒成立，而当 $x\neq 0$ 时，

所以 $a=0$.

【小问 2 详解】

当 $a=2$，$b=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}+2$，

由 $x>0$，得 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+2=4$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=1$ 时取等号，

所以，当 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 取得最小值为 4.

17. 某班级的所有学生中，课前是否预习本节课所学内容的人数情况如下表所示.

	男生	女生
预习了所学内容	12	17
没预习所学内容	6	5

现从该班所有学生中随机抽取一人：

（1）求抽到预习了所学内容的概率；

（2）若抽到的同学是男生，求他预习了所学内容的概率；

（3）试判断“抽到的同学是男生”与“抽到的同学预习了所学内容”是否相互独立，并说明理由.

【答案】（1）$\dfrac{29}{40}$；

（2）$\dfrac{2}{3}$；

（3）不独立，理由见解析.

【解析】

【分析】（1）根据给定的数表，利用古典概率公式计算即得.

（2）根据给定条件，利用条件概率公式计算即得.

（3）利用相互独立事件的定义判断即得.

【小问 1 详解】

设抽到预习本节课所学内容的同学为事件 A，抽到的同学是男生为事件 B，

由数表知，该班共有 40 名同学, 预习了本节课所学内容的学生有 29 人，

则 $P(A)=\frac{29}{40}$.

【小问 2 详解】

依题意，$n(B)=18, n(AB)=12$，因此 $P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$,

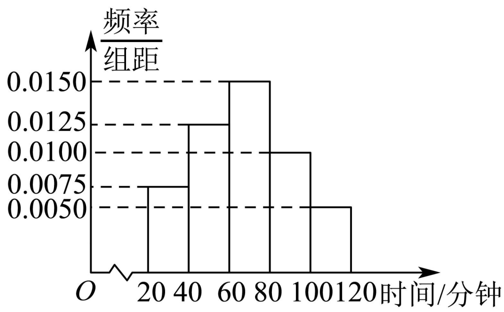
所以抽到的同学是男生，他预习了所学内容的概率为 $\frac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

由数表知，$P(A)=\frac{29}{40}$，$P(B)=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$，$P(AB)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，

所以“抽到的同学是男生”与“抽到的同学预习了本节课所学内容”不相互独立.

18. 为促进全民阅读，建设书香校园，某校在寒假面向全体学生发出“读书好、读好书、好读书”的号召，并开展阅读活动．开学后，学校随机抽取了 100 名学生，调查这 100 名学生的假期日均阅读时间（单位：分钟），得到了如图所示的频率分布直方图．



（1）若该校共有 2000 名同学，试估计该校假期日均阅读时间在 $[20,60)$ 内的人数；

（2）开学后，学校从日均阅读时间不低于 60 分钟的学生中，按照分层抽样的方式，抽取了 6 名学生作为代表进行国旗下演讲．若演讲安排在第二，三，四周（每周两人，不重复）进行．求第二周演讲的 2 名学生至少有一名同学的日均阅读时间处于 $[60,80)$ 的概率；

（3）用频率估计概率，从该校学生中随机抽取 3 人，设这 3 人中日均阅读时间不低于 60 分钟人数为 X，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$.

【答案】（1）800 人；

（2）$\frac{4}{5}$；

（3）分布列见解析，期望为 1.8.

【解析】

【分析】（1）利用频率分布直方图求出 $[20,60)$ 的频率，再估计人数即得.

（2）求出在$[60,80)$，$[80,100)$，$[100,120]$抽取的人数，再结合组合计数求出古典概率.

（3）求出X的可能值及各个值对应的概率，利用二项分布列出分布列并求出期望.

【小问1详解】

由频率分布直方图知，各组频率依次为：0.15，0.25，0.3，0.2，0.1，

则100人的样本中假期日均阅读时间$[20,60)$的频率为$0.15+0.25=0.4$，

估计该校学生假期日均阅读时间在$[20,60)$内的频率为0.4.

所以估计该校假期日均阅读时间在$[20,60)$内的人数为$2000\times0.4=800$人.

【小问2详解】

阅读时间在$[60,80)$，$[80,100)$，$[100,120]$的频率依次为：0.3，0.2，0.1，

则在$[60,80)$，$[80,100)$，$[100,120]$抽取的人数依次为3人，2人，1人，

设第二周演讲的2名学生至少有一名同学的日均阅读时间处于$[60,80)$为事件A，

所以$P(A)=\dfrac{C_3^1C_3^1+C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{9+3}{15}=\dfrac{4}{5}$.

【小问3详解】

从该校学生中随机抽取1人，则此人假期日均阅读时间不低于60分钟的概率为$0.3+0.2+0.1=0.6$，

随机变量X的可能取值为$0,1,2,3$，得$X\sim B(3,0.6)$，

则$P(X=0)=C_3^0\times0.4^3\times0.6^0=0.064$，$P(X=1)=C_3^1\times0.4^2\times0.6^1=0.288$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.4^1\times0.6^2=0.432$，$P(X=3)=C_3^3\times0.4^0\times0.6^3=0.216$，

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

数学期望为$E(X)=3\times0.6=1.8$.

19. 某农产品经销商计划分别在甲、乙两个市场销售某种农产品（两个市场的销售互不影响），为了了解该种农产品的销售情况，现分别调查了该农产品在甲、乙两个市场过去10个销售周期内的销售情况，得下表：

销售量 销售周期个数	3吨	4吨	5吨

市场			
甲	3	4	3
乙	2	5	3

（1）从过去 10 个销售周期中随机抽取一个销售周期，求甲市场销售量为 4 吨的概率；

（2）以市场销售量的频率代替销售量的概率．设 X（单位：吨）表示下个销售周期两个市场的总销售量，求随机变量 X 概率分布列；

（3）在（2）的条件下，设该经销商计划在下个销售周期购进 n 吨该产品，在甲、乙两个市场同时销售，已知该产品每售出 1 吨获利 1000 元，未售出的产品降价处理，每吨亏损 200 元．以销售利润的期望作为决策的依据，判断 $n=7$ 与 $n=8$ 应选用哪一个．

【答案】（1）0.4；

（2）分布列见解析；　　（3）应选 $n=8$．

【解析】

【分析】（1）利用古典概率求得结果．

（2）求出 X 的可能及各个值对应的概率，列出分布列．

（3）分别求出 $n=7$ 与 $n=8$ 时销售利润的期望，再比较大小即得结果．

【小问 1 详解】

设甲市场销售量为 4 吨的事件为 A，则 $P(A)=0.4$．

【小问 2 详解】

设甲市场销售量为 x 吨的概率为 $P\left(x\right)$，乙市场销售量为 y 吨的概率为 $P\left(y\right)$，

则由题意得 $P\left(x=3\right)=0.3$，$P\left(x=4\right)=0.4$，$P\left(x=5\right)=0.3$；

$P\left(y=3\right)=0.2$，$P\left(y=4\right)=0.5$，$P\left(y=5\right)=0.3$，

设两个市场总需求量为 X 的概率为 $P\left(X\right)$，X 所有可能的取值为 6，7，8，9，10，

$P\left(X=6\right)=P\left(x=3,y=3\right)=P\left(x=3\right)P\left(y=3\right)=0.3\times0.2=0.06$，

$P\left(X=7\right)=P\left(x=3,y=4\right)+P\left(x=4,y=3\right)=0.3\times0.5+0.4\times0.2=0.23$，

$P\left(X=8\right)=P\left(x=3,y=5\right)+P\left(x=4,y=4\right)+P\left(x=5,y=3\right)=0.3\times0.3+0.4\times0.5+0.3\times0.2=0.35$，

$P(X=9)=P(x=4,y=5)+P(x=5,y=4)=0.4\times0.3+0.3\times0.5=0.27$，

$P(X=10)=P(x=5,y=5)=0.3\times0.3=0.09$，

所以 X 的分布列如下表：

X	6	7	8	9	10
P	0.06	0.23	0.35	0.27	0.09

【小问 3 详解】

由（2）知，$P(X=6)=0.06$，$P(X\geq7)=0.94$，

当 $n=7$ 时，销售利润 T_1，当 $X=6$ 时，$T_1=1000\times6-(7-6)\times200=5800$，当 $X\geq7$ 时，$T_2=1000\times7=7000$，

因此 T_1 的分布列为：

X	$X=6$	$X\geq7$
T_1	5800	7000
P	0.06	0.94

则 $E(T_1)=5800\times0.06+7000\times0.94=6928$ 元；

当 $n=8$ 时，$P(X=6)=0.06$，$P(X=7)=0.23$，$P(X\geq8)=0.71$，

销售利润 T_2，当 $X=6$ 时，$T_2=1000\times6-(8-6)\times200=5600$，

当 $X=7$ 时，$T_2=1000\times7-(8-7)\times200=6800$，当 $X\geq8$ 时，$T_2=1000\times8=8000$，

因此 T_2 的分布列为：

X	$X=6$	$X=7$	$X\geq8$
T_2	5600	6800	8000
P	0.06	0.23	0.71

则 $E(T_2)=5600\times0.06+6800\times0.23+8000\times0.71=7850$ 元；

因为 $7850>6928$，所以应选 $n=8$.

20. 已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+x$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 1，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程；

（2）定义：若 $\forall x\in[a,b]$，均有 $f(x)\le g(x)$，则称函数 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的控制函数.

① $\forall x\in[0,1]$，试问 $g(x)=x$ 是否为函数 $f(x)=2x^3-3x^2+x$ 的“控制函数”？并说明理由；

② $\forall x\in[0,3]$，若 $g(x)=x+m$ 为函数 $f(x)=2x^3-3x^2+x$ 的“控制函数”，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）切线方程为 $y=x$， $y=x-1$

（2）①是“控制函数”，理由见解析；② $m\ge 27$

【解析】

【分析】（1）根据斜率求出切点坐标，再由直线的点斜式方程可得答案；

（2）①由 $f(x)\le g(x)$ 得 $x^2(2x-3)\le 0$，根据 x 的范围可得答案；②转化为 $\forall x\in[0,3]$，$2x^3-3x^2\le m$ 恒成立，令 $h(x)=2x^3-3x^2$ 求出 $h(x)$ 在 $\forall x\in[0,3]$ 的最值可得答案.

【小问 1 详解】

$f'(x)=6x^2-6x+1$，所以 $f'(x_0)=6x_0^2-6x_0+1=1$，

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$，可得切点坐标为 $(0,0)$，或 $(1,0)$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=x$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$；

【小问 2 详解】

①，是“控制函数”，理由如下，

由 $f(x)\le g(x)$ 得 $2x^3-3x^2+x\le x$，

可得 $2x^3-3x^2\le 0$， $x^2(2x-3)\le 0$，

因为 $\forall x\in[0,1]$时， $x^2(2x-3)\le 0$ 恒成立，

即 $2x^3-3x^2+x\le x$ 恒成立，

所以函数 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的“控制函数”；

②，若 $g(x)=x+m$ 为函数 $f(x)=2x^3-3x^2+x$ 的“控制函数”，

则 $\forall x\in[0,3]$， $f(x)=2x^3-3x^2+x\le g(x)=x+m$ 恒成立，

即 $\forall x\in[0,3]$，$2x^3-3x^2\le m$ 恒成立，

令 $h(x)=2x^3-3x^2$，$x\in[0,3]$，

$h'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $1<x<3$ 时，$h'(x)>0$，

$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,3)$ 上单调递增，

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 有极小值，$h(0)=0$，$h(3)=2\times3^3-3\times3^2=27$，

所以 $m\ge 27$.

【点睛】方法点睛：利用导数研究不等式恒成立或存在型问题，首先要构造函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，进而得出相应的含参不等式，从而求出参数的取值范围；也可分离变量，构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}+a\ln x+\dfrac{a}{x}$.

（1）当 $a=e$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）写出 $f(x)$ 的零点个数（直接写出结果）.

【答案】（1）$1+e$；

（2）答案见解析；　　（3）当 $a\ge-\dfrac{1}{e}$ 时，无零点；当 $a<-\dfrac{1}{e}$ 时，有 1 个零点.

【解析】

【分析】（1）把 $a=e$ 代入，求出函数 $f(x)$ 的导数，探讨单调性求出最小值.

（2）求出函数 $f(x)$ 的导数，按导数的零点分布情况分类讨论求出单调区间.

（3）结合（2）的结论，借助单调性确定最值、极值情况，并结合零点存在性性定理确定零点个数.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=e$ 时，$f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}+e\ln x+\dfrac{e}{x}$，求导得 $f'(x)=\dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}+\dfrac{e}{x}-\dfrac{e}{x^2}=\dfrac{(e^{x-1}+e)(x-1)}{x^2}$，

而 $e^{x-1}+e>0$，则当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

因此函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以当$x=1$时，$f(x)$取得最小值为$f(1)=1+\mathrm{e}$.

【小问2详解】

函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，求导得$f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}(x-1)}{x^2}+\dfrac{a}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{(\mathrm{e}^{x-1}+a)(x-1)}{x^2}$，

当$a\ge 0$时，$\mathrm{e}^{x-1}+a>0$，则当$x>1$时，$f'(x)>0$，当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，

因此函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，令$f'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{x-1}+a)(x-1)}{x^2}=0$，解得$x_1=1$，$x_2=1+\ln(-a)$，

①当$1+\ln(-a)\le 0$，即$-\dfrac{1}{e}\le a<0$时，由$f'(x)<0$，得$0<x<1$，由$f'(x)>0$，得$x>1$，

因此函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增；

②当$1+\ln(-a)>1$，即$a<-1$时，由$f'(x)>0$，得$0<x<1$或$x>1+\ln(-a)$，由$f'(x)<0$，得$1<x<1+\ln(-a)$，

因此函数$f(x)$在$(0,1)$，$(1+\ln(-a),+\infty)$上单调递增，在$(1,1+\ln(-a))$单调递减；

③当$1+\ln(-a)=1$，即$a=-1$时，$f'(x)\ge 0$恒成立，函数$f(x)$上$(0,+\infty)$上单调递增；

④当$0<1+\ln(-a)<1$，即$-1<a<-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，由$f'(x)>0$，得$0<x<1+\ln(-a)$或$x>1$，由$f'(x)<0$，得$1+\ln(-a)<x<1$，

因此函数$f(x)$在$(0,1+\ln(-a))$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(1+\ln(-a),1)$单调递减，

所以当$a\ge -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，函数$f(x)$的递减区间为$(0,1)$，递增区间为$(1,+\infty)$；

当$-1<a<-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，函数$f(x)$的递减区间为$(1+\ln(-a),1)$，递增区间为$(0,1+\ln(-a))$，$(1,+\infty)$；

当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(0,+\infty)$，无递减区间；

当 $a\le -1$ 时，函数 $f(x)$ 的递减区间为 $(1,1+\ln(-a))$，递增区间为 $(0,1)$，$(1+\ln(-a),+\infty)$.

【小问 3 详解】

由（2）知，当 $a\ge -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$f(x)_{\min}=f(1)=1+a>0$，因此函数 $f(x)$ 无零点；

当 $-1<a<-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(1+\ln(-a),1)$ 上递减，在 $(0,1+\ln(-a))$，$(1,+\infty)$ 上递增，

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=1+a>0$，当 $x=1+\ln(-a)$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(1+\ln(-a))>0$，

而 x 从大于 0 的方向趋近于 0 时，$f(x)$ 趋近于负无穷大，因此 $f(x)$ 有唯一零点；

当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$f(1)=1+a=0$，因此 $f(x)$ 有唯一零点；

当 $a<-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(1+\ln(-a),+\infty)$ 上递增，在 $(1,1+\ln(-a))$ 递减，

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极在值 $f(1)=1+a<0$，当 $x=1+\ln(-a)$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(1+\ln(-a))<0$，

而 x 趋近于正无穷大时，$f(x)$ 趋近于正无穷大，因此 $f(x)$ 有唯一零点；

所以当 $a\ge -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 无零点；当 $a<-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一零点.

【点睛】关键点点睛：导数问题往往涉及到分类讨论，分类讨论标准的确定是关键，一般依据导数是否有零点、零点存在时零点是否在给定的范围内及零点在给定范围内时两个零点的大小关系来分层讨论.