参考答案

一、选择题

ACBCD　BBACC

二、填空题

11. $[-3,1)$　　12. 8, $\frac{1}{64}$　　13. 3　　14. $\frac{8}{15}$　　15. -2, $(-\infty, -1)$

三、解答题

(16)(本小题 13 分)

解：(I)∵ $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中，各项的系数之和为 729，

∴ 令 $x=1$，得 $3^n=729$，　--------------------------4 分

解得 $n=6$.　--------------------------6 分

(II) $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $C_6^r(2x)^{6-r}(\frac{1}{x})^r=2^{6-r}C_6^r x^{6-2r}$，　--------8 分

若存在含 x^2 的项，则 $6-2r=2$，　--------10 分

解得 $r=2$.　--------12 分

所以展开式中存在含 x^2 的项，此项为 $2^4C_6^2x^2=240x^2$.　--------13 分

(17)(本小题 13 分)

解：(I)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

∵数列$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$,

∴ $a_2\cdot a_4=a_3^2=4$,　---1 分

∴$a_3=2$,　---2 分

∴a_3=$a_1\cdot q^2$=2 .　(或$a_2\cdot a_4=a_1q\cdot a_1q^3=a_1^2\cdot q^4=4$) --------------2 分

又∵a_1=8,

∴$q=\frac{1}{2}$,　--4 分

∴$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{4-n}$,　--5 分

∴$b_n=\log_2 a_n=4-n$,　--6 分

∴$b_{n+1}-b_n=[4-(n+1)]-(4-n)$　--7 分

$=-1$　是常数.

∴数列$\{b_n\}$是等差数列，　首项$b_1=3$,公差 $d=-1$. ----------------------------8 分

(II)(法一)

∵$S_n=\frac{b_1+b_n}{2}\cdot n=-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n$,　---10 分

∴对称轴 $n=\frac{7}{2}$,　--11 分

$\therefore$n = 3 或 4 时，S_n最大，最大值为 6.--13 分

(法二)　$\because b_n = 4 - n$ ，

$\therefore$数列$\{b_n\}$是递减数列.　--9 分

又由$b_n = 4 - n$，可知：　当$n < 4$ 时，$b_n > 0$;

当$n = 4$ 时，$b_n = 0$;

当$n > 4$ 时，$b_n < 0$;

--11 分

$\therefore S_1 < S_2 < S_3 = S_4 > S_5 > \cdots$.

$\therefore$n = 3 或 4 时，S_n最大 .　　　　---12 分

$\because S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 3 + 2 + 1 = 6$,

$\therefore S_n$的最大值为 6 .　　　　　---13 分

(18)(本小题 14 分)

解:(I)

$\because f(x) = x^3 + ax^2 + 1, x \in R,$

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax$.　　　　————————————————2 分

$\therefore f(0) = 1, f'(0) = 0$. ————————————————————4 分

$\therefore$ $f(x)$在($\mathbf{0}$，$f(\mathbf{0})$)处的切线方程为 $y - 1 = 0(x - 0)$ ，即 $y = 1$.————5 分

(II)由(I)可知 $f'(x) = 3x^2 + 2ax$.

令 $f'(x) = 0$ ，可得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{2}{3}a$.

$\because -\frac{3}{2} < a < 0, \therefore 0 < -\frac{2}{3}a < 1.$

————————————————————7 分

当 x 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	0	$(0, -\frac{2}{3}a)$	$-\frac{2}{3}a$	$(-\frac{2}{3}a, 1)$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	单调递减	极小值	单调递增	a+2

————————————————9 分

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0, -\frac{2}{3}a)$ 上单调递减，在 $(-\frac{2}{3}a, 1)$ 上单调递增.

$\because -\frac{3}{2} < a < 0, \therefore \frac{1}{2} < a + 2 < 2$　　　　————————————10 分

当$a+2<1$，即$-\frac{3}{2}<a<-1$时，$f(x)_{\max}=f(0)=1$. ————————————12 分

当$a+2\geq 1$，即$-1\leq a<0$时，$f(x)_{\max}=f(1)=a+2$. ————————————14 分

所以当$-\frac{3}{2}<a<-1$时，$f(x)$的最大值为 1；当$-1\leq a<0$时，$f(x)$的最大值为$a+2$.

19.(本小题 15 分)

解：(I)样本中学生在 A 餐厅用早餐的频率为$\frac{35}{100}$，据此估计该学校 2000 名学生每日在 A 餐厅用早餐的人数为：$2000\times\frac{35}{100}=700$. ------------------4 分

(II)从该学校用午餐的学生中随机抽取1人，由样本的频率估计该学生在 A 餐厅用餐的概率$p=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$.

--5 分

X的可能取值为$0,1,2,3$, $X\sim$（3，$\frac{3}{5}$）.-----------------------------------6 分

$P(X=0)=C_3^0\times(1-\frac{3}{5})^3=\frac{8}{125}$；

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{3}{5})^2=\frac{36}{125}$；

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{3}{5})^2\times(1-\frac{3}{5})^1=\frac{54}{125}$；

$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$. ---------------------------------------10 分

X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

$E(X)=np=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$. ---12 分

(III)此问 3 分，结论和理由不唯一，阅卷时结合给出的理由酌情给分.

设事件E为“随机抽查10人，有2人在 B 餐厅用晚餐”. 假设在 B 餐厅用晚餐的人数较上个星期没有变化，由样本估计从在学校用晚餐的学生中随机抽查 1 人，此人在 B 餐厅用晚餐的概率为$\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$.由上个星期的样本数据估计$P(E)=C_{10}^2\times(\frac{2}{3})^2\times(1-\frac{2}{3})^8=\frac{20}{6561}\approx 0.003$，

示例答案 1:可以认为发生了变化.理由如下：

事件E是一个小概率事件，一般认为小概率事件在一次随机试验中不易发生，如果发生了，可以认为在 B

餐厅用晚餐的人数较上个星期发生了变化；

示例答案 2：无法确定有没有变化.理由如下：

$P(E)$ 比较小，一般不容易发生，随机事件在一次随机实验中是否发生是随机的，事件 E 也是有可能发生的，所以无法确定有没有变化；

示例答案 3：无法确定有没有变化.理由如下：

抽查的人数少，样本容量太小，可能抽到的大部分是在 A 餐厅用餐的学生(抽到了极端情形)，所以抽查结果可能无法准确反映在两个餐厅的实际用餐人数.

--15 分

(20)(本小题 15 分)

解：(I)若 $a=\frac{\mathrm{e}}{2}$，

则 $f(x)=\frac{e}{2}x^2-e^x$， $f'(x)=ex-e^x$. ________________________1 分

所以 $h(x)=f'(x)=ex-e^x$，则 $h'(x)=e-e^x$. ________________________2 分

令 $h'(x)>0$，即 $e-e^x>0$，解得 $x<1$；

令 $h'(x)<0$，即 $e-e^x<0$，解得 $x>1$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减 . ________________4 分

(II)(i)法一：因为 $h(x)=2ax-e^x(x\in(0,+\infty))$，所以 $h'(x)=2a-e^x$.

易知 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减， $h'(0)=2a-1$.________________________6 分

当 $2a-1\le 0$ 即 $a\le\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)<h'(0)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $h(0)=-1<0$，所以 $h(x)=f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 无极值.____7 分

当 $2a-1>0$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时，

由 $h'(x)=0$ 可得 $e^x=2a,\therefore x=\ln(2a)$.

当 x 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(0,\ln(2a))$	$\ln(2a)$	$(\ln(2a),+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	单调递增	极大值	单调递减

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上单调递增，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递减.

当 $x=\ln(2a)$ 时，$h(x)$ 有极大值

$h(\ln(2a))=2a\ln(2a)-2a=2a(\ln(2a)-1)$.________________________8 分

①当 $h(\ln(2a)) \le 0$ 即 $\ln(2a) \le 1, \frac{1}{2} < a \le \frac{e}{2}$ 时，

$h(x) = f'(x) \le 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 无极值.____9 分

②当 $h(\ln(2a)) > 0$ 即 $\ln(2a) > 1, a > \frac{e}{2}$ 时，

因为 $h(0) = -1 < 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上有且只有一个零点，记为 x_0.

当 x 变化时，$h(x)$即$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,ln(2a))$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以，当 $a > \frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 有极小值.________________________________11 分

(i)法二：

$h(x) = f'(x) = 2ax - e^x = x(2a - \frac{e^x}{x})((x \in (0,+\infty))$.

令 $g(x) = 2a - \frac{e^x}{x}(x > 0)$，则 $g'(x) = -\frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(1-x)}{x^2}$.____________________6 分

当 $x \in (0,1)$ 时，$g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = 2a - e$.______________________________________7 分

①当 $2a - e \le 0$，即 $a \le \frac{e}{2}$ 时，$2a - \frac{e^x}{x} \le 0$,

$\therefore h(x) = f'(x) \le 0, \therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 无极值.____8 分

②当 $2a - e > 0$，即 $a > \frac{e}{2}$ 时，

当 $x > 0$ 且 $x \to 0$ 时，$e^x \to 1, \therefore \frac{e^x}{x} \to +\infty, \therefore -\frac{e^x}{x} \to -\infty, \therefore 2a - \frac{e^x}{x} \to -\infty$.

又 $\because g(1) = 2a - e > 0$，$\therefore \exists x_0 \in (0,1)$, 使 $g(x_0) = 0$.$\therefore h(x_0) = 0$ ______________9 分

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时，$h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0, \therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x \in (x_0, 1)$ 时，$h(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0, \therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore$ 当 $x = x_0$ 时，$f(x)$ 有极小值.

$\therefore f(x)$ 有极小值时，a 的取值范围是 $(\frac{e}{2},+\infty)$.——————11 分

(ii) $m=f(x_0)=ax_0{}^2-e^{x_0}$.

$\because h(x_0)=0,\therefore 2ax_0-e^{x_0}=0$.——————12 分

$\therefore m=ax_0{}^2-2ax_0=a(x_0-1)^2-a$.——————13 分

$\because h(0)=-1<0,h(1)=2a-e>0,$

$\therefore x_0\in(0,1)$, $a>\frac{e}{2}$.——————14 分

$\therefore m>-a.$——————15 分

(21)(本小题 15 分)

解答：(I) $S(A_5)$ 所能取到的最大值是 3，所能取到的最小值是-3；——————4 分

(II)用反证法，假设任意 $k\in\{1,2,\cdots,2024\}$，$a_k\neq 0$.——————5 分

设 a_l 是 A_n 中最后一个小于零的项(由 $a_1=-1,n=2024$ 可知这样的项存在)，并且由 $a_n=1$ 可知 $l<n$.

由 $a_1=-1$，$a_{k+1}-a_k\in\{1,0,-1\}(k=1,2,\cdots,n-1)$ 可知 A_n 是整数列，

从而 $a_l\leq -1,a_{l+1}\geq 1$，所以 $a_{l+1}-a_l\geq 2$，与 $a_{k+1}-a_k\in\{1,0,-1\}(k=1,2,\cdots,n-1)$ 矛盾.

所以假设不成立，从而存在 $k\in\{1,2,\cdots,2024\}$，使得 $a_k=0$；——————9 分

(III)令 $c_k=a_{k+1}-a_k$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$)，则 $c_k\in\{-1,0,1\}$.

因为 $a_2=a_1+c_1$，$a_3=a_1+c_1+c_2,\ldots,a_n=a_1+c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}$，

所以 $S(A_n)=na_1+(n-1)c_1+(n-2)c_2+(n-3)c_3+\cdots+c_{n-1}=n+(n-1)c_1+(n-2)c_2+(n-3)c_3+\cdots+c_{n-1}$

根据 $a_1=a_n$ 可知 $c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}=0$，注意到 $c_k\in\{-1,0,1\}$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$)，并且 c_k 中 1 与-1 的个数相等.

当 $n=2k+1\left(k\in N^*\right)$ 时，

$$\begin{aligned}S(A_n)&=n+(n-1)c_1+(n-2)c_2+(n-3)c_3+\cdots+c_{n-1}\\&=2k+1+2kc_1+(2k-1)c_2+\cdots+2c_{2k-1}+c_{2k}\\&=2k+1+\left(k-\frac{1}{2}\right)c_1+\left(k-\frac{3}{2}\right)c_2+\cdots+\left(\frac{3}{2}-k\right)c_{2k-1}+\left(\frac{1}{2}-k\right)c_{2k}+\left(k+\frac{1}{2}\right)(c_1+c_2+\cdots+c_{2k-1}+c_{2k})\\&=2k+1+\left(k-\frac{1}{2}\right)(c_1-c_{2k})+\left(k-\frac{3}{2}\right)(c_2-c_{2k-1})+\cdots+\frac{1}{2}(c_k-c_{k+1})+\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot 0\\&\leq 2k+1+\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdot 2+\cdots+\frac{1}{2}\cdot 2\\&=2k+1+2k-1+2k-3+\cdots+1\\&=(k+1)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

等号取到当且仅当 $c_1=c_2=\cdots=c_k=1,c_{k+1}=c_{k+2}=\cdots=c_{2k}=-1$.

当 $n=2k\left(k\in N^*\right)$ 时，

$$
\begin{aligned}
S(A_n) &= n+(n-1)c_1+(n-2)c_2+(n-3)c_3+\cdots+c_{n-1} \\
&= 2k+\left(2k-1\right)c_1+(2k-2)c_2+\cdots+2c_{2k-2}+c_{2k-1} \\
&= 2k+\left(k-1\right)c_1+\left(k-2\right)c_2+\cdots+\left(2-k\right)c_{2k-2}+\left(1-k\right)c_{2k-1}+k\cdot\left(c_1+c_2+\cdots+c_{2k-2}+c_{2k-1}\right) \\
&= 2k+\left(k-1\right)\left(c_1-c_{2k-1}\right)+\left(k-2\right)\left(c_2-c_{2k-2}\right)+\cdots+1\cdot\left(c_{k-1}-c_{k+1}\right)+0\cdot c_k+k\cdot 0 \\
&\le 2k+\left(k-1\right)\cdot 2+\left(k-2\right)\cdot 2+\cdots+1\cdot 2 \\
&= k\left(k+1\right)=\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

等号取到当且仅当 $c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}=1, c_{k+1}=c_{k+2}=\cdots=c_{2k}=-1, c_k=0$.

综上所述，$S(A_n)$ 所能取到的最大值是 $S\left(A_n\right)_{\max}=\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]=\begin{cases} k\left(k+1\right), & n=2k, \\ \left(k+1\right)^2, & n=2k+1. \end{cases}$

——————15 分

(注：第三问，奇数偶数结果各占 1 分，证明过程各占 2 分.)