北京市朝阳区2024～2025学年度第一学期期中质量检测

高三数学试卷

2024.11

（考试时间120分钟　满分150分）

本试卷分为选择题40分和非选择题110分

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)设集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$　　(B) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　(D) $\{x\mid 1<x<3\}$

(2)若函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}(x>0)$ 在 $x=a$ 处取得最小值，则 $a=$

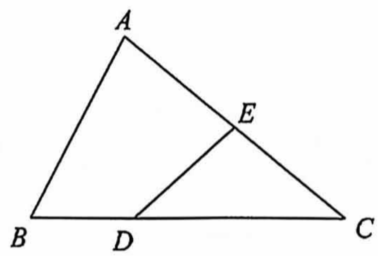
(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 2　　(D) 4

(3)下列函数中，既是奇函数又在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增的是

(A) $y=2^x$　　(B) $y=\ln|x|$

(C) $y=\tan x$　　(D) $y=x-\dfrac{2}{x}$

(4)如图，在△ABC 中，$BD=\dfrac{1}{3}BC$，$AE=\dfrac{1}{2}AC$，则



(A) $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(B) $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{DE}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{DE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

(5)已知单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 满足 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$，设向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{i}$ 夹角的余弦值是

(A) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(6)《九章算术》是我国古代数学名著，书中有如下的问题："今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何?"意思是："一女子善于织布，每天织的布都是前一天的 2 倍，已知她 5 天共织布 5 尺，问这女子每天分别织布多少?". 由此推算，在这 5 天中，织布超过 1 尺的天数共有

(A)1 天　　(B)2 天

(C)3 天　　(D)4 天

(7)已知 α,β 均为第二象限角，则"$\sin\alpha>\sin\beta$"是"$\cos\alpha>\cos\beta$"的

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

(8)已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\leqslant 0, \\ 2\sqrt{x+1}, x>0. \end{cases}$ 若直线 $y=x+m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有且只有一个公共点，则实数 m 的取值范围是

(A)$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

(B)$(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$

(C)$(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$

(D)$(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

(9)在三棱锥 $O-ABC$ 中，棱 OA,OB,OC 两两垂直，点 P 在底面 ABC 内，已知点 P 到 OA，OB,OC 所在直线的距离分别为 1,2,2，则线段 OP 的长为

(A)$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　(B)$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(C)3　　(D)$\dfrac{9}{2}$

(10)数学家康托尔创立了集合论，集合论的产生丰富了现代计数方法．记 $|S|$ 为集合 S 的元素个数，$\varphi(S)$ 为集合 S 的子集个数，若集合 A,B,C 满足：

①$|A|=99$，$|B|=100$；

②$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)=\varphi(A\cup B\cup C)$，

则 $|A\cap B\cap C|$ 的最大值是

(A)99　　(B)98

(C)97　　(D)96

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

(11)计算$\frac{2i}{1-i}=$________.

(12)在$\triangle ABC$中,已知$\cos A=\frac{3}{5}$,则$\sin A=$________;$\tan(\pi-A)=$________.

(13)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=An^2+Bn$(A,B为常数),写出一个有序数对(A,B) $=$________,使得数列$\{a_n\}$是递增数列.

(14)某种灭活疫苗的有效保存时间T(单位:h)与储藏的温度t(单位:°C)满足函数关系$T=e^{kt+b}$(k,b为常数,其中$e=2.71828\cdots$).已知该疫苗在0°C时的有效保存时间是1440 h,在5°C时的有效保存时间是360 h,则该疫苗在10°C时的有效保存时间是________ h.

(15)对于无穷数列$\{a_n\}$,若存在常数$M>0$,对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有不等式$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\leqslant M$成立,则称数列$\{a_n\}$具有性质$P$.给出下列四个结论:

①存在公差不为0的等差数列$\{a_n\}$具有性质P;

②以1为首项,q($|q|<1$)为公比的等比数列$\{a_n\}$具有性质P;

③若由数列$\{a_n\}$的前n项和构成的数列$\{S_n\}$具有性质P,则数列$\{a_n\}$也具有性质P;

④若数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均具有性质P,则数列$\{a_nb_n\}$也具有性质P.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

在$\triangle ABC$中,$a\cos C+c\cos A=2a$.

(Ⅰ)求$\frac{b}{a}$的值;

(Ⅱ)若$A=\frac{\pi}{6}$,$c=\sqrt{3}$,求b及$\triangle ABC$的面积.

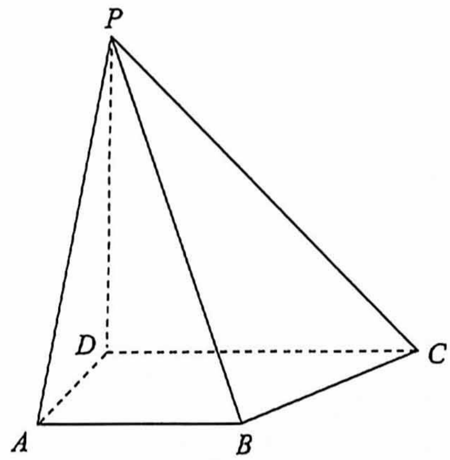
(17)(本小题 15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$ 平面 $ABCD$,$AB // CD$,$AD\perp CD$,$AB=AD=2$,$CD=PD=3$.

(Ⅰ)求证:$AB\perp$ 平面 PAD;

(Ⅱ)求平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值;

(Ⅲ)记平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l. 试判断直线 AB 与 l 的位置关系,并说明理由.



(18)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=ax-\ln(x+1)\ (a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $a=1$,求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 存在极小值,求 a 的取值范围.

(19)(本小题 14 分)

设函数$f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+2\cos^2\omega x\sin\varphi(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$.

(Ⅰ)若$\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{6}$,求$f(\frac{\pi}{2})$的值;

(Ⅱ)已知$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上单调递增,且$x=\frac{\pi}{3}$是函数$y=f(x)$的图象的对称轴,再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知,使函数$f(x)$存在,求ω,φ的值.

条件①:当$x=-\frac{\pi}{6}$时,$f(x)$取到最小值;

条件②:$f(\frac{\pi}{3})=\frac{5}{2}$;

条件③:$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$上单调递减.

注:如果选择的条件不符合要求,第(Ⅱ)问得 0 分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

(20)(本小题 15 分)

已知函数$f(x)=e^x+\cos x$.

(Ⅰ)求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(Ⅱ)讨论$f(x)$在区间$(-\pi,+\infty)$上的零点个数;

(Ⅲ)若$f(m)=n$,其中$m>0$,求证:$n-m>2$.

(21)(本小题15分)

若有穷正整数数列 $A:a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2n}(n\geqslant 3)$ 满足如下两个性质,则称数列 A 为 T 数列:

①$a_{2i-1}+a_{2i}=2^i(i=1,2,3,\cdots,n)$;

②对任意的 $i\in\{1,2,3,\cdots,2n-1\}$,都存在正整数 $j\leqslant i$,使得 $a_{i+1}=a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_{j+(i-j)}$.

(Ⅰ)判断数列 $A:1,1,1,3,3,5$ 和数列 $B:1,1,2,2,4,4,4,12$ 是否为 T 数列,说明理由;

(Ⅱ)已知数列 $A:a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2n}(n\geqslant 3)$ 是 T 数列.

(ⅰ)证明:对任意的 $i\in\{2,3,\cdots,n-1\}$,$a_{2i}=3\times 2^{i-2}$ 与 $a_{2i+1}=3\times 2^{i-2}$ 不能同时成立;

(ⅱ)若 n 为奇数,求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的最大值.

(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)