通州区 2023—2024 学年高三年级摸底考试

数学试卷　　2024 年 1 月

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.已知集合 $A=\{0,1,2,3\},B=\{x\in\mathbf{Z}|-1\leqslant x<2\}$，则 $A\cup B=$

A.$\{0,1\}$　B.$\{1,2,3\}$　C.$\{0,1,2,3\}$　D.$\{-1,0,1,2,3\}$

2.已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=1-3\mathrm{i}$，则复数 $|z|=$

A.$\sqrt{3}$　B.$\sqrt{5}$　C.$2\sqrt{2}$　D.$\sqrt{10}$

3.已知双曲线的左、右焦点分别为 $F_1(-3,0),F_2(3,0),P$ 为双曲线上一点,且 $\left||PF_2|-|PF_1|\right|=2$,则双曲线的标准方程为

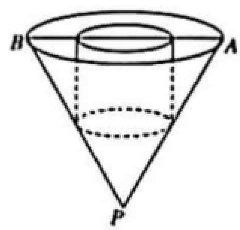
A.$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$　B.$x^2-\dfrac{y^2}{10}=1$　C.$\dfrac{y^2}{8}-x^2=1$　D.$\dfrac{y^2}{10}-x^2=1$

4.下列函数中，是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

A.$f(x)=\dfrac{1}{x}$　B.$f(x)=-\log_2 x$　C.$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$　D.$f(x)=|\cos x|$

5.如图，已知某圆锥形容器的轴截面$\triangle PAB$为等边三角形，其边长为 4，在该容器内放置一个圆柱，使得圆柱上底面的所在平面与圆锥底面的所在平面重合.若圆柱的高是圆锥的高的$\dfrac{1}{2}$，则圆柱的体积为

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　B.$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　C.$\sqrt{3}\pi$　D.$2\sqrt{3}\pi$

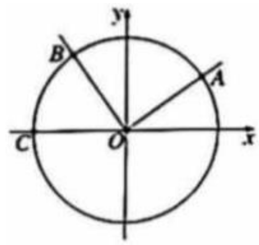


6.已知函数 $f(x)=x^2-2x+c(c\in\mathbf{R})$，则“$\exists x\in\mathbf{R}, f(x)<0$”是“$c<3$”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

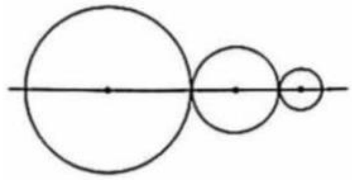
C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7.如图,在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和 β 的顶点都与原点重合,始边都与 x 轴的非负半轴重合,终边分别与单位圆交于 A,B 两点.若 $A\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right),C(-1,0),\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\cos(\beta-\alpha)=$



A.$\dfrac{-4-3\sqrt{3}}{10}$　B.$\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$　C.$\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{10}$　D.$\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

8.现有 12 个圆,圆心在同一条直线上,从第 2 个圆开始,每个圆都与前一个圆外切,从左到右它们的半径的长依次构成首项为 16,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,前 3 个圆如图所示.若点 P,Q 分别为第 3 个圆和第 10 个圆上任意一点,则 $|PQ|$ 的最大值为



A. $\frac{255}{32}$　　B. $\frac{255}{16}$　　C. $\frac{127}{8}$　　D. $\frac{255}{8}$

9.在菱形 $ABCD$ 中, $AB=2,\angle BAD=60^{\circ}$, E 是 BC 的中点, F 是 CD 上一点（不与 C , D 重合）, DE 与 AF 交于 G ，则 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{4}{3}\right)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,3)$

10.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ |2x+1|, x\leqslant 0\end{cases}$，实数 a,b,m 满足 $a\leqslant m\leqslant b$.若对任意的 m ，总有不等式 $f(m)+m\leqslant 3$ 成立，则 $b-a$ 的最大值为

A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{10}{3}$　　C.4　　D.6

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.已知函数 $f(x)=2^x+\log_2(x+3)$，则 $f(-2)=$_________.

12.在 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中， x 的系数为_________.

13.在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ,且 $a=b\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$ ，则 $B=$_________；若 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3},a+c=5$ ，则 $b=$_________.

14.已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F ，点 $P(m,n)$ 为 C 上一点且在第一象限，以 F 为圆心， FP 为半径的圆交 C 的准线于 A,B 两点.若 $n=4$ ，则圆 F 的方程为_________；若 $PA\perp AB$ ，则 $m=$_________.

15.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n=3(a_n-2)$ ，数列 $\{b_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，且满足 $b_1=\frac{1}{2}a_1,b_4$ 是 b_1 和 b_{12} 的等比中项.给出下列四个结论：

①数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\times 3^n$ ；

②数列 $\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$ 前 21 项的和为 $\frac{14}{45}$ ；

③数列$\{b_n\}$中各项先后顺序不变，在b_m与$b_{m+1}\left(m\in N^*\right)$之间插入$2^m$个 2，使它们和原数列的项构成一个新数列，则新数列的前 100 项和为 236；

④设数列$\{c_n\}$的通项公式$c_n=\begin{cases}1,n\neq 2^k\\ a_k,n=2^k\end{cases}$，则数列$\{c_n-1\}$的前 100 项和为 2178.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

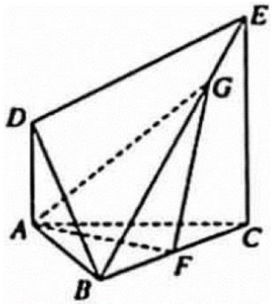
16.（本小题 13 分）已知函数$f\left(x\right)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x$.

（1）求$f\left(x\right)$的最小正周期及单调递增区间；

（2）若$f\left(x_0\right)=1$，且$x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，求$x_0$的值.

17.（本小题 13 分）如图,在多面体$ABCDE$中,$\triangle ABC$为等边三角形,AD // $CE, AC\perp CE, AC=CE=2AD=2$.

点F为BC的中点，再从下面给出的条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.



（1）求证：$AF\perp$平面BCE；

（2）设点G为BE上一点，且$BG=\dfrac{2}{3}BE$，求直线AC与平面AFG所成角的正弦值.

条件①：平面$ACED\perp$平面ABC；

条件②：$BE=2\sqrt{2}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 14 分）民航招飞是指普通高校飞行技术专业（本科）通过高考招收飞行学生,报名的学生参加预选初检、体检鉴定、飞行职业心理学检测、背景调查、高考选拔等 5 项流程，其中前 4 项流程选拔均通过,则被确认为有效招飞

申请，然后参加高考，由招飞院校择优录取.据统计，每位报名学生通过前 4 项流程的概率依次约为 $\frac{3}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$.假设学生能否通过这 5 项流程相互独立，现有某校高三学生甲、乙、丙三人报名民航招飞.

（1）估计每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率；

（2）求甲、乙、丙三人中恰好有一人被确认为有效招飞申请的概率；

（3）根据甲、乙、丙三人的平时学习成绩，预估高考成绩能被招飞院校录取的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{3}{5}$，设甲、乙、丙三人能被招飞院校录取的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

19.（本小题 15 分）已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{x}$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2ax^{2}+4ax(a>0)$.

①若 $g\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求 $g\left(x\right)$ 的单调区间；

②若 $g\left(x\right)$ 恰有三个零点，求 a 的取值范围.

20.（本小题 15 分）已知椭圆 $E:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 2，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设椭圆 E 的上、下顶点分别为点 A,B，过点 $M\left(0,2\right)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同两点 $P\left(x_{1},y_{1}\right),Q\left(x_{2},y_{2}\right)$，且 $y_{1}>y_{2}$，直线 AP 与直线 BQ 交于点 N，求证：点 N 在一条定直线上.

21.（本小题 15 分）

已知数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为有穷正整数数列.若数列 A 满足如下两个性质，则称数列 A 为 m 的 k 减数列：

① $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$；

②对于 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，使得 $a_i > a_j$ 的正整数对 (i, j) 有 k 个.

（1）写出所有 4 的 1 减数列；

（2）若存在 m 的 6 减数列，证明：$m > 6$；

（3）若存在 2024 的 k 减数列，求 k 的最大值.