

# 海淀区 2024 年高二年级学业水平调研

## 数 学

2024.07

本试卷共 5 页，共 3 道大题，19 道小题，满分 100 分。考试时长 90 分钟。试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

### 第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)  $(x-1)^5$  的展开式中，所有二项式系数的和为

- (A) 0 (B)  $2^5$   
(C) 1 (D)  $2^5$

(2) 已知函数  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ ，则  $f'(0)$  的值为

- (A) 0 (B) 1  
(C) -1 (D)  $\pi$

(3) 若等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n - 1$ ，则公比  $q =$

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2}$   
(C) 2 (D) -2

(4) 下列函数中，在区间  $[-1, 0]$  上的平均变化率最大的是

- (A)  $y = x^2$  (B)  $y = x^3$   
(C)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  (D)  $y = 2^x$

(5) 将分别写有 2, 0, 2, 4 的四张卡片，按一定次序排成一行组成一个四位数 (首位不为 0)，则组成的不同四位数的个数为

- (A) 9 (B) 12  
(C) 18 (D) 24

(6) 小明投篮三次，每次投中的概率为 0.8，且每次投篮互不影响。若投中一次得 2 分，没投中得 0 分，总得分为  $X$ ，则

- (A)  $E(X) = 2.4$  (B)  $E(X) = 4.8$

(C)  $D(X) = 0.48$

(D)  $D(X) = 0.96$

(7) 已知一批产品中，A 项指标合格的比例为 80%，B 项指标合格的比例为 70%，A、B 两项指标都合格的比例为 60%。从这批产品中随机抽取一个产品，若 A 项指标合格，则该产品的 B 项指标也合格的概率是

(A)  $\frac{3}{7}$

(B)  $\frac{2}{3}$

(C)  $\frac{3}{4}$

(D)  $\frac{5}{6}$

(8) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1 < 0$ ，则“ $S_n$  有最大值”是“公差  $d \leq 0$ ”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(9) 设函数  $f(x) = \ln(1-x) + a \sin x$ 。若  $f(x) \leq f(0)$  在  $(-1,1)$  上恒成立，则

(A)  $a = 0$

(B)  $a \geq 1$

(C)  $0 < a \leq 1$

(D)  $a = 1$

(10) 在经济学中，将产品销量为  $x$  件时的总收益称为收益函数，记为  $R(x)$ ，相应地把  $R'(x)$  称为边际收益函数，它可以帮助企业决定最优的生产或销售水平。假设一个企业的边际收益函数  $R'(x) = 1000 - x$ （注：经济学中涉及的函数有时是离散型函数，但仍将其看成连续函数来分析）。给出下列三个结论：

① 当销量为 1000 件时，总收益最大

② 若销量为 800 件时，总收益为 T，则当销量增加 400 件时，总收益仍为 T

③ 当销量从 500 件增加到 501 件时，总收益改变量的近似值为 500

其中正确结论的个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

## 第二部分 (非选择题 共 60 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

- (11)  $(1+2x)^4$  的展开式中,  $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_.
- (12) 某学校组织趣味运动会, 一共设置了 3 个项目 (只包含 1 个球类项目), 每位教师只能从 3 个项目中随机选择 2 个参加. 设李老师选择的 2 个项目中所含球类项目的数量为  $X$ , 则  $X$  的所有可能取值为\_\_\_\_\_, 数学期望  $E(X) =$  \_\_\_\_\_.
- (13) 已知数列  $\{a_n + 1\}$  是公比为 2 的等比数列. 若  $a_1 = 0$ , 则  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n =$  \_\_\_\_\_.
- (14) 甲乙两人射击一架进入禁飞区的无人机. 已知甲乙击中无人机的概率分别为 0.5, 0.4, 且甲乙射击互不影响, 则无人机被击中的概率为\_\_\_\_\_. 若无人机恰好被一人击中, 则被击落的概率为 0.2; 若恰好被两人击中, 则被击落的概率为 0.6, 那么无人机被击落的概率为\_\_\_\_\_.
- (15) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $a_1 = 1$ , 当  $n \geq 2$  时,  $S_n^2 - a_n^2 = \lambda$ . 给出下列四个结论:
- ① 当  $\lambda = 0$  时,  $a_3 = -\frac{1}{4}$ ;
  - ② 当  $\lambda = -3$  时,  $S_{2024} = 2$ ;
  - ③ 当  $\lambda = 4$  时,  $\forall n \geq 2$ ,  $S_n > 2$  恒成立;
  - ④ 当  $\lambda > 1$  时,  $\{a_n\}$  从第三项起为递增数列.
- 其中所有正确结论的序号为\_\_\_\_\_.

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 8 分)

已知函数  $f(x) = (x-1)e^x - x^2$ .

- (I) 判断  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上的单调性，并证明；  
 (II) 求  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的零点个数.

(17) (本小题 10 分)

某公司有甲乙两条生产线生产同一种产品，为了解产品的质量情况，对两条生产线生产的产品进行简单随机抽样，经检测得到了  $A$ 、 $B$  两项质量指标值，记为  $q_A, q_B$ ，定义产品的指标偏差  $Q = |q_A - 1| + |q_B - 2|$ ，数据如下表：

甲生产线抽样 产品编号 指标	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q_A$	0.98	0.96	1.07	1.02	0.99	0.93	0.92	0.96	1.11	1.02
$q_B$	2.01	1.97	1.96	2.03	2.04	1.98	1.95	1.99	2.07	2.02
$Q$	0.03	0.07	0.11	0.05	0.05	0.09	0.13	0.05	0.18	0.04

乙生产线抽样 产品编号 指标	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_A$	1.02	0.97	0.95	0.94	1.13	0.98	0.97	1.01
$q_B$	2.01	2.03	2.15	1.93	2.01	2.02	2.19	2.04
$Q$	0.03	0.06	0.20	0.13	0.14	0.04	0.22	0.05

假设用频率估计概率，且每件产品的质量相互独立.

- (I) 从甲生产线上随机抽取一件产品，估计该产品满足  $q_A > 1$  且  $q_B > 2$  的概率；  
 (II) 从甲、乙两条生产线上各随机抽取一件产品，设  $X$  表示这两件产品中满足  $q_B > 2$  的产品数，求  $X$  的分布列和数学期望；  
 (III) 已知  $Q$  的值越小则该产品质量越好，如果两条生产线各生产一件产品，根据现有数据判断哪条生产线上的产品质量更好？并说明理由.

(18) (本小题 11 分)

$$\text{已知 } f(x) = \frac{x^2 + ax \ln x + b}{x}.$$

(I) 当  $a = -3, b = -1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 已知  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且满足  $f(x_1) + f(x_2) = 0$ , 求  $b$  的值;

(III) 在 (II) 的条件下, 若  $f(x) \geq -x + 1$  在  $[1, +\infty)$  上恒成立, 求  $a$  的取值范围.

(19) (本小题 11 分)

已知数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_{100}$  满足  $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$ , 集合  $S = \{a_i + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 100\}$ . 设  $S$

中有  $m$  个元素, 从小到大排列顺次为:  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .

(I) 若  $a_n = n$ , 请写出  $m, b_1, b_m$  的值;

(II) 若  $a_n = 2^n$ , 求  $b_{20}$ ;

(III) 若  $b_{2025} = a_i + a_j (i < j)$ , 求  $j$  的最小值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)