海淀区 2024 年高二年级学业水平调研

数学参考答案

2024.07

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B	（2）B	（3）C	（4）B	（5）A
（6）B	（7）C	（8）C	（9）D	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11） 24　　（12） 0,1 ；$\dfrac{2}{3}$　　（13） 2^n-n-1

（14） 0.7 ； 0.22　　（15） ①③④

三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

（16）（共 8 分）

解：（Ⅰ） $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，证明如下：

因为 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-x^2$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x-2x=x\mathrm{e}^x-2x=x(\mathrm{e}^x-2)$，

又因为 $x\in(-\infty,0)$，从而 $\mathrm{e}^x-2<1-2<0$，

所以 $f'(x)=x(\mathrm{e}^x-2)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知： $f'(x)=x(\mathrm{e}^x-2)$，

因为 $x\in(0,+\infty)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗

因为 $f(0)=(0-1)e^0-0^2=-1<0$ ，

$f(2)=(2-1)e^2-2^2=e^2-2^2>0$ ，

所以由零点存在定理及 $f(x)$ 单调性可知， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有一个零点．

（17）（共 10 分）

解：（Ⅰ）记 A 表示“从甲生产线上随机抽取一件产品，该产品满足 $q_A>1$ 且 $q_B>2$ ”.

用频率估计概率，则 $P(A)=\dfrac{3}{10}$.

所以该产品满足 $q_A>1$ 且 $q_B>2$ 的概率为 $\dfrac{3}{10}$.

（Ⅱ）由题意， X 的所有可能取值为 0，1，2．

$P(X=0)=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{16}$ ， $P(X=1)=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{10}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{1}{2}$ ，

$P(X=2)=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{16}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{7}{16}$

所以 X 的数学期望为 $EX=0\times\dfrac{1}{16}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{7}{16}=\dfrac{11}{8}$.

（Ⅲ）甲生产线上的产品质量更好，

因为甲生产线上 Q 值的平均值 $\overline{Q}_{甲}=\dfrac{0.80}{10}=0.08$ ，

乙生产线上 Q 值的平均值 $\overline{Q}_{乙}=\dfrac{0.87}{8}>0.1$ ，

所以甲生产线上 Q 值的平均值明显比乙小，

所以甲生产线上的产品质量更好．

其它理由：计算甲生产品的 Q 值小于乙的概率 $\dfrac{7+4+4+5+5+4+3+5+2+6}{8\times10}=\dfrac{9}{16}>\dfrac{1}{2}$

（注：答案不唯一，理由需要支撑相应结论，只计算甲乙方差不能作为理由。）

（18）（共 11 分）

解：（Ⅰ）当 $a=-3,b=-1$ 时，$f(x)=x-3\ln x-\dfrac{1}{x}$，　$f(1)=0$，

所以　$f'(x)=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，

所以　$f'(1)=-1$.

所以　曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$.

（Ⅱ）因为 $f(x)=x+a\ln x+\dfrac{b}{x}$，　$x\in(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=1+\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}=\dfrac{x^2+ax-b}{x^2}$.

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，

所以 $f'(x)$ 有两个大于 0 的变号零点，

所以方程 $x^2+ax-b=0$ 有两个不等正根，

所以 $\begin{cases}\Delta=a^2+4b>0\\ x_1x_2=-b>0\\ x_1+x_2=-a>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2>-4b\\ b<0\\ a<0\end{cases}$.

又因为 $f(x_1)+f(x_2)=0$，

即有 $x_1+a\ln x_1+\dfrac{b}{x_1}+x_2+a\ln x_2+\dfrac{b}{x_2}=0$，

整理得 $(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)+b\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=0$，

代入 $x_1x_2=-b,x_1+x_2=-a$，

可得 $(-a)+a\ln(-b)+b\dfrac{-a}{-b}=0$，解得 $b=-1$.

又因为 $\begin{cases}a^2>-4b\\ a<0\end{cases}$，所以可得 $a<-2$.

经检验，符合题意.

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 $b=-1$ 且 $a<-2$，从而 $f(x)=x+a\ln x-\dfrac{1}{x}$，

因为 $f(x)\geq -x+1$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=f(x)+x-1=2x+a\ln x-\dfrac{1}{x}-1$， $x\in[1,+\infty)$.

则有 $g(x)\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，易得 $g(1)=2+a\ln 1-1-1=0$，

因为 $g'(x)=2+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^2+ax+1}{x^2}$，所以 $g'(1)=a+3$，

令 $h(x)=2x^2+ax+1$， $x\in[1,+\infty)$， $h(1)=3+a$，对称轴 $x=-\dfrac{a}{4}$.

（1）当 $-3\leq a<-2$ 时， $h(1)=3+a\geq 0$， $x=-\dfrac{a}{4}\leq\dfrac{3}{4}$，

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，从而 $h(x)\geq h(1)=3+a\geq 0$ 恒成立，

所以 $g'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 也恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，从而 $g(x)\geq g(1)=0$ 恒成立.

（2）当 $a<-3$ 时， $h(1)=3+a<0$，

所以 $2x^2+ax+1=0$ 有两个不等实根 x_3,x_4（不妨设 $x_3<x_4$），

所以 $x_3<1<x_4$，且当 $x\in(1,x_4)$ 时， $h(x)<0$，从而 $g'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,x_4]$ 上单调递减，

所以 $g(x_4)<g(1)=0$，与“ $g(x)\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立”矛盾！

综上，a 的取值范围是 $[-3,-2)$.

（19）（共 11 分）

解：（Ⅰ）$m=197$，$b_1=3$，$b_m=199$.

（Ⅱ）因为对任意$1\le i<j\le 100$，都有$a_i+a_{i+1}=2^i+2^{i+1}<2^{i+2}<a_1+a_{i+2}$，$1\le i\le 98$，

所以$b_1,b_2,\cdots,b_m$依次为

$b_1=2^1+2^2$,

$b_2=2^1+2^3,b_3=2^2+2^3$,

$b_4=2^1+2^4,\cdots,b_6=2^3+2^4$,

$b_7=2^1+2^5,\cdots,b_{10}=2^4+2^5$,

$b_{11}=2^1+2^6,\cdots,b_{15}=2^5+2^6$,

$b_{16}=2^1+2^7,\cdots,b_{21}=2^6+2^7,\cdots$

所以$b_{20}=2^5+2^7=160$.

（Ⅲ）$j_{\min}=25$.

先证明：$j\ge 25$.

方法 1：

考虑从$a_{j-1},a_j,...,a_{100}$这$102-j$个数中任取 2 个求和，

这些和都不小于$a_{j-1}+a_j$，

因为$a_i+a_j\le a_{j-1}+a_j$，所以$2024+\mathrm{C}_{102-j}^2\le 4950$，从而$\mathrm{C}_{102-j}^2\le 2926$，

因为$\mathrm{C}_{77}^2=2926$，所以$102-j\le 76$，即$j\ge 25$.

方法 2：

假设$j\le 24$，则$i\le 23$.

则$b_{2025}=a_i+a_j\le a_{23}+a_{24}$，

因为满足$a_m+a_k<a_{23}+a_{24}(m<k)$的必要条件是$m<23$（因为若$m\ge 23$，则

$k \ge 24$，不等式不成立），

所以小于 $a_{23}+a_{24}$ 的和式至多有以下情况：

$a_1+a_2, a_1+a_3, \cdots, a_1+a_{100}$；

$a_2+a_3, a_2+a_3, \cdots, a_2+a_{100}$；

……

$a_{22}+a_{23}, a_{22}+a_{24}, \cdots, a_{22}+a_{100}$；

共 99+98+……+78=$\dfrac{(99+78)\times 22}{2}=1947<2024$，不合题意.

其次，证明存在符合要求的数列.

构造：令 $a_k=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots,99$，$a_{100}=1$.

显然满足 $a_1<a_2<\cdots<a_{100}$，

且 $a_k+a_{100}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}<2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}=a_{k+1}+a_{k+2}$，$k=1,2,\cdots,98$.

此时，$b_{2025}=a_{24}+a_{25}$，故 $j_{\min}=25$.

（注：a_n 构造方法不唯一）