石景山区2023年高三统一练习

数 学

本试卷共7页，满分为150分，考试时间为120分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$， $B=\{x\mid x^2+x-2\leqslant 0\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[-2,2]$　（B）$[-2,1]$　（C）$[0,1]$　（D）$[0,2]$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(-2,-1)$，则 $\dfrac{z}{\mathrm{i}}=$

（A）$-1-2\mathrm{i}$　（B）$-2-\mathrm{i}$　（C）$-1+2\mathrm{i}$　（D）$2-\mathrm{i}$

（3）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的离心率是 2，则 $b=$

（A）12　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（4）下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是

（A）$f(x)=\sin x$　（B）$f(x)=2^{|x|}$

（C）$f(x)=x^3+x$　（D）$f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})$

（5）设 $x>0$， $y>0$，则“ $x+y=2$ ”是“ $xy\leqslant 1$ ”的

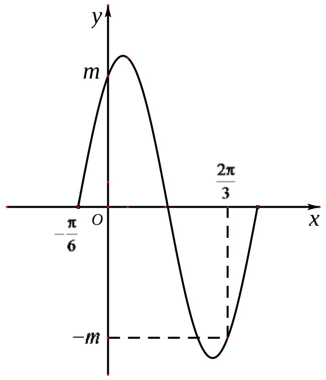
（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_m a_n=a_{m+n}$，且 $a_2=3$，则 $a_{10}=$

（A）3^4　（B）3^5　（C）3^6　（D）3^{10}

（7）若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 φ 的值是



（A）$\dfrac{\pi}{3}$

（B）$\dfrac{\pi}{6}$

（C）$\dfrac{\pi}{4}$

（D）$\dfrac{\pi}{12}$

（8）在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v(单位：km/s) 与燃料的质量 M(单位：kg)，火箭(除燃料外)的质量 m(单位：kg) 的函数关系是 $v=2000\ln(1+\dfrac{M}{m})$．当燃料质量与火箭质量的比值为 t_0 时，火箭的最大速度可达到 $v_0 km/s$.若要使火箭的最大速度达到 $2v_0 km/s$，则燃料质量与火箭质量的比值应为

（A）$2t_0^2$　　（B）$t_0^2+t_0$　　（C）$2t_0$　　（D）$t_0^2+2t_0$

（9）已知直线 $l:kx-y-2k+2=0$ 被圆 $C:x^2+(y+1)^2=25$ 所截得的弦长为整数，则满足条件的直线 l 有

（A）6 条　　（B）7 条　　（C）8 条　　（D）9 条

（10）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 为正方形 $ABCD$ 所在平面内一动点，给出下列三个命题：

①若点 P 总满足 $PD_1\perp DC_1$，则动点 P 的轨迹是一条直线；

②若点 P 到直线 BB_1 与到平面 CDD_1C_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹是抛物线；

③若点 P 到直线 DD_1 的距离与到点 C 的距离之和为 2，则动点 P 的轨迹是椭圆.

其中正确的命题个数是

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）向量 $\boldsymbol{a}=(2\sin\theta,\cos\theta)$， $\boldsymbol{b}=(1,1)$，若 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$，则 $\tan\theta=$__________.

（12）抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点坐标为_______，若抛物线 C 上一点 M 的纵坐标为 2，则点 M 到抛物线焦点的距离为________.

（13）若 $(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中含有常数项，则正整数 n 的一个取值为_________.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a,\\ -x, & x>a.\end{cases}$

① 若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为_______；

② 若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是_______.

（15）项数为 $k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 2)$ 的有限数列 $\{a_n\}$ 的各项均为不小于 -1 的整数，满足 $a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+a_3\cdot 2^{k-3}+\cdots+a_{k-1}\cdot 2+a_k=0$，其中 $a_1\neq 0$.给出下列四个结论：

①若 $k=2$，则 $a_2=2$；

②若 $k=3$，则满足条件的数列 $\{a_n\}$ 有 4 个；

③存在 $a_1=1$ 的数列 $\{a_n\}$；

④所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 中，首项相同.

其中所有正确结论的序号是___________.

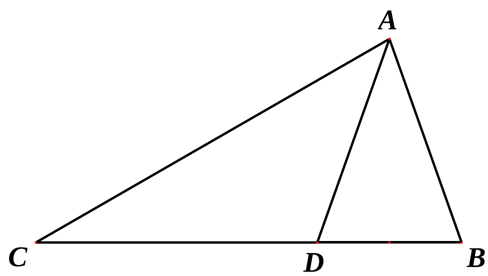
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）(本小题满分 13 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=4\sqrt{2}$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，点 D 在 BC 边上，$\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 AD 的长；

（Ⅱ）若 $\triangle ABD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，求 AB 的长.



（17）（本小题满分 13 分）

某高校“植物营养学专业”学生将鸡冠花的株高增量作为研究对象，观察速效肥和缓释肥对农作物影响情况．其中速效肥、缓释肥、未施肥三种处理下的鸡冠花分别对应 $1, 2, 3$ 三组．观察一段时间后，分别从 $1, 2, 3$ 三组随机抽取 40 株鸡冠花作为样本，得到相应的株高增量数据整理如下表．

株高增量（单位：厘米）	$(4,7]$	$(7,10]$	$(10,13]$	$(13,16]$
第 1 组鸡冠花株数	9	20	9	2
第 2 组鸡冠花株数	4	16	16	4
第 3 组鸡冠花株数	13	12	13	2

假设用频率估计概率，且所有鸡冠花生长情况相互独立．

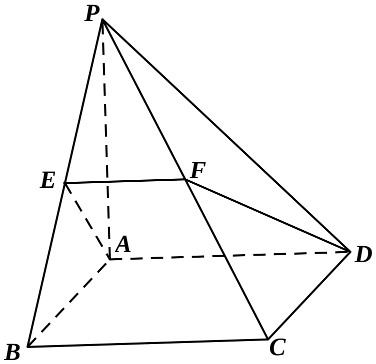
（I）从第 1 组所有鸡冠花中随机选取 1 株，估计株高增量为 $(7,10]$ 厘米的概率；

（II）分别从第 1 组，第 2 组，第 3 组的所有鸡冠花中各随机选取 1 株，记这 3 株鸡冠花中恰有 X 株的株高增量为 $(7,10]$ 厘米，求 X 的分布列和数学期望 EX；

（III）用“$\xi_k = 1$”表示第 k 组鸡冠花的株高增量为 $(4,10]$ 厘米，“$\xi_k = 0$”表示第 k 组鸡冠花的株高增量为 $(10,16]$ 厘米，$(k = 1, 2, 3)$，直接写出方差 $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3$ 的大小关系．（结论不要求证明）

（18）（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，点 F 为棱 PC 上的点，平面 ADF 与棱 PB 交于点 E .



（Ⅰ）求证： $EF\,//\,AD$ ；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求平面 PCD 与平面 $ADFE$ 所成锐二面角的大小.

条件①： $AE=\sqrt{2}$ ；

条件②：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

条件③： $PB\perp FD$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（19）（本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 过点 $(0,\sqrt{3})$，且离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）过点 $P(-1,1)$ 且互相垂直的直线 l_1,l_2 分别交椭圆 C 于 M,N 两点及 S,T 两点．求 $\dfrac{|PM||PN|}{|PS||PT|}$ 的取值范围.

（20） (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-1-m\sin x\ (m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=1$时，

（ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（ⅱ）求证：$\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$f(x)>0$.

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上恰有一个极值点，求 m 的取值范围.

（21） (本小题满分 15 分)

若无穷数列$\{a_n\}$满足以下两个条件，则称该数列为τ 数列.

① $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$|a_n-2|=|a_{n-1}+2|$；

② 若存在某一项 $a_m\leqslant -5$，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，使得 $a_k=a_m+4$($m\geqslant 2$ 且 $m\in\mathbf{N}^{*}$) .

（Ⅰ）若 $a_2<0$，写出所有 τ 数列的前四项；

（Ⅱ）若 $a_2>0$，判断 τ 数列是否为等差数列，请说明理由；

（Ⅲ）在所有的 τ 数列中，求满足 $a_m=-2021$ 的 m 的最小值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）