石景山区 2023 年高三统一练习

数学试卷答案及评分参考

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A	（2）C	（3）B	（4）D	（5）A
（6）B	（7）A	（8）D	（9）B	（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\frac{1}{2}$　　（12）$(0,1)$ 3　　（13）3（只要是 3 正整数倍即可）

（14）2　$(-\infty,-\sqrt{2})$　　（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）(本小题满分 13 分)

解：（Ⅰ）因为 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB=-\frac{1}{3}$

在 $\triangle ADC$ 中，因为 $\angle ADC\in(0,\pi)$，

所以 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得，$\frac{AD}{\sin C}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$.

所以 $AD=\frac{AC\cdot\sin C}{\sin\angle ADC}=\frac{4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}=3$.

（Ⅱ）$\triangle ABD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，得 $\frac{1}{2}DB\cdot DA\sin\angle ADB=2\sqrt{2}$，

因为 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle ADB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

又因为 $AD=3$，所以 $BD=2$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$AB^2=DA^2+DB^2-2DA\cdot DB\cdot\cos\angle ADB$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=9$. 所以 $AB=3$.

（17）(本小题满分 13 分)

解：（Ⅰ）设事件 A 为“从第1组所有鸡冠花中各随机选取1株，株高增量为 $(7,10]$ 厘米”，根据题中数据，第1组所有鸡冠花中，有20株鸡冠花增量为 $(7,10]$ 厘米.

所以 $P(A)$ 估计为 $\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

（Ⅱ）设事件 B 为“从第2组所有鸡冠花中各随机选取1株，株高增量为 $(7,10]$ 厘米”，设事件 C 为“从第3组所有鸡冠花中各随机选取1株，株高增量为 $(7,10]$ 厘米”，根据题中数据，$P(B)$ 估计为 $\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$，$P(C)$ 估计为 $\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$

根据题意，随机变量 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$，且

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$，

$P(X=1)=P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$

$P(X=3)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)$.

所以，$P(X=0)$ 估计为 $\frac{21}{100}$；$P(X=1)$ 估计为 $\frac{11}{25}$；

$P(X=3)$ 估计为 $\frac{3}{50}$；$P(X=2)$ 估计为 $\frac{29}{100}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{21}{100}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{3}{50}$

所以 EX 估计为 $0\times\frac{21}{100}+1\times\frac{11}{25}+2\times\frac{29}{100}+3\times\frac{3}{50}=\frac{6}{5}$.

（III）$D\xi_1<D\xi_3<D\xi_2$.

（18）(本小题满分 14 分)

解：（Ⅰ）证明：因为底面$ABCD$是正方形，所以$AD // BC$，

$BC\subset$平面PBC， $AD\not\subset$平面PBC，

所以$AD //$平面PBC

又因为平面ADF与PB交于点E.

$AD\subset$平面$ADFE$，平面$PBC\cap$平面$ADFE=EF$,

所以 $EF // AD$.

（Ⅱ）选条件①②

侧面PAD为等腰直角三角形，且$\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$,

即$PA=AD=2$， $PA\perp AD$

平面$PAD\perp$平面$ABCD$，

平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$， $PA\subset$平面PAD，

则$PA\perp$平面$ABCD$，又$ABCD$为正方形，

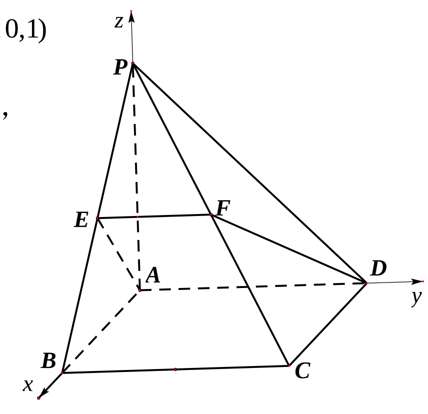
所以$PA\perp AB, PA\perp AD, AB\perp AD$.

以点A为坐标原点， AB, AD, AP方向分别为x轴, y轴, z轴正方向，

建立如图所示空间直角坐标系$A-xyz$，

则$A(0,0,0), P(0,0,2), C(2,2,0), B(2,0,0), D(0,2,0)$

因为$AE=\sqrt{2}$，所以点E为PB的中点，则$E(1,0,1)$



从而：$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2), \overrightarrow{AD}=(0,2,0), \overrightarrow{AE}=(1,0,1)$，

设平面$ADFE$的法向量为： $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=2y=0\end{cases}$，

令$x=1$，可得$\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$

（方法 2：因为PAB为等腰三角形，则$PB\perp AE, PB\perp AD, AE\cap AD=A$

$PB\perp$平面$ADFE$，则$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$平面$ADFE$的法向量）

设平面PCD的法向量为： $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=2y-2z=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2x+2y-2z=0 \end{cases},$$

令 $y=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$

所以 $|\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2}$

则两平面所成的锐二面角为 $\dfrac{\pi}{3}$

选条件①③

侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，即 $PA=AD=2, PA\perp AD$

$AD\perp AB, PA\cap AB=A$，可得 $AD\perp$ 平面 PAB， $PB\subset$ 平面 PAB，则 $AD\perp PB$.

又因为 $PB\perp FD, AD\cap FD=D,$

则 $PB\perp$ 平面 $ADFE$ ，$AE\subset$ 平面 $ADFE,$ 则 $PB\perp AE$

因为 $PA=AB$，所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 E 为 PB 的中点

又因为 $AE=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，

下面同①②

选条件②③

侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，

即 $PA=AD=2, PA\perp AD$

平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$， $PA\subset$ 平面 PAD，

则 $PA\perp$ 平面 $ABCD, ABCD$ 为正方形，

所以 $PA\perp AB, PA\perp AD, AB\perp AD$.

又因为 $PB\perp FD, AD\cap FD=D,$ 则 $PB\perp$ 平面 $ADFE$， $AE\subset$ 平面 $ADFE,$

则 $PB\perp AE$

因为 $PA=AB$，所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 E 为 PB 的中点.

下面同①②

（19）(本小题满分 15 分)

解：（Ⅰ）因为椭圆过点$(0,\sqrt{3})$，故$b=\sqrt{3}$，

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，则$a=2$，

故椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）当直线l_1斜率不存在

$l_1:x=-1,l_2:y=1$

分别代入椭圆方程得：$M(-1,\frac{3}{2}),N(-1,-\frac{3}{2}),S(-\frac{2\sqrt{6}}{3},1),T(\frac{2\sqrt{6}}{3},1)$

所以：$|PM|=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},|PN|=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2},$

$|PS|=\frac{2\sqrt{6}}{3}-1,|PT|=\frac{2\sqrt{6}}{3}+1,$

可得：$\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}=\frac{3}{4}$，

当直线l_2斜率不存在时，同理可得，$\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}=\frac{4}{3}$

当l_1,l_2斜率均存在且不为 0 时，设直线l_1斜率为k，则直线l_2斜率为$-\frac{1}{k}$

设直线l_1的方程为：$y-1=k(x+1)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

由$\begin{cases} y-1=k(x+1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

得$(3+4k^2)x^2+(8k^2+8k)x+4k^2+8k-8=0$

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2=-\frac{8k^2+8k}{3+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\frac{4k^2+8k-8}{3+4k^2} \end{cases},$$

$|PM|=\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-1)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1+1|$，

$|PN|=\sqrt{(x_2+1)^2+(y_2-1)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_2+1|$，

同理可知：

设直线 l_2 的方程为： $y-1=-\frac{1}{k}(x+1)$， $S(x_3,y_3),T(x_4,y_4)$

$$x_3+x_4=-\frac{8-8k}{3k^2+4}=\frac{8k-8}{3k^2+4},$$

$$x_3\cdot x_4=\frac{4-8k-8k^2}{3k^2+4},$$

$$|PS|=\sqrt{(x_3+1)^2+(y_3-1)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|x_3+1|,$$

$$|PT|=\sqrt{(x_4+1)^2+(y_4-1)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|x_4+1|,$$

则 $\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}=\frac{(1+k^2)|x_1+1||x_2+1|}{(1+\frac{1}{k^2})|x_3+1||x_4+1|}=k^2\cdot\frac{|x_1x_2+x_1+x_2+1|}{|x_3x_4+x_3+x_4+1|}$

$$=k^2\cdot\frac{\left|\frac{-5}{3+4k^2}\right|}{\left|\frac{-5k^2}{3k^2+4}\right|}=\left|\frac{3k^2+4}{4k^2+3}\right|=\frac{\frac{3}{4}(4k^2+3)+\frac{7}{4}}{4k^2+3}\in(\frac{3}{4},\frac{4}{3})$$

综上所述： $\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}$ 的取值范围是 $[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$

（20）(本小题满分 15 分)

解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时， $f'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$,

（ⅰ） $f'(0)=0$，又 $f(0)=0$，所以切线 l 方程为 $y=0$.

（ⅱ） $f(x)=\mathrm{e}^x-1-\sin x$

解法一： $f'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，因为 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\mathrm{e}^x>1$， $-\cos x>-1$,

所以 $\mathrm{e}^x-\cos x>0$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$

解法二：令 $g(x)=\mathrm{e}^x-1-x$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$

所以，函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-1-x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x-1-x>0$.

令 $h(x)=x-\sin x$， $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $h'(x)=1-\cos x>0$.

所以，函数 $h(x)=x-\sin x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增.

所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $x-\sin x>0$.

所以 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-\sin x>0$.

（Ⅱ） $f(x)=\mathrm{e}^x-1-m\sin x$， $f'(x)=\mathrm{e}^x-m\cos x$，

当 $m\leqslant 1$ 时，所以 $-m\cos x\geqslant -\cos x$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x-m\cos x\geqslant \mathrm{e}^x-\cos x$，

由（Ⅰ）知， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

所以当 $m\leqslant 1$ 时， $f(x)=\mathrm{e}^x-1-m\sin x$ 没有极值点.

当 $m>1$ 时， $f'(x)=\mathrm{e}^x-m\cos x$，

因为 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=-m\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 单调递增.

所以 $f'(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 单调递增.

所以 $f'(0)=1-m<0$， $f'(\dfrac{\pi}{2})=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}>0$.

所以 $\exists x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 使得 $f'(x_0)=0$.

所以当 $0<x<x_0$ 时， $f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减.

当 $x_0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在区间 $(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增.

故函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点， m 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

（21）(本小题满分 15 分)

解：（Ⅰ）由条件①知，当 $n\geqslant 2$ 时， $a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n=a_{n-1}+4$.

因为 $a_2<0$，由条件①知 $a_2=-1$.

所以 τ 数列的前四项为：$1,-1,1,-1$； $1,-1,1,5$； $1,-1,3,-3$； $1,-1,3,7$.

（Ⅱ）若 $a_2>0$， τ 数列是等差数列.

由条件①知，当 $n\geqslant 2$ 时， $a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n=a_{n-1}+4$.

因为 $a_2>0$，所以 $a_2=5$.

假设 τ 数列中存在最小的正整数 i （$i\geqslant 3$），使得 $a_i=-a_{i-1}$.

由条件①知， $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 单调递增，即均为正数，且 $a_{i-1}\geqslant a_2=5$.

所以 $a_i=-a_{i-1}\leqslant -5$.由条件②知，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,i-1\}$，使得 $a_k=a_i+4\leqslant -1$.

此时与 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 均为正数矛盾，

所以不存在整数 i （$i\geqslant 3$），使得 $a_i=-a_{i-1}$，即 $a_n=a_{n-1}+4$.

所以 τ 数列为首项为 1 公差为 4 的等差数列.

（Ⅲ）由 $a_m=-2021$ 及条件②，

可得 -1， -5， -9， …， -2017， -2021 必为数列 $\{a_n\}$ 中的项，

记该数列为 $\{b_n\}$，有 $b_n=-4n+3(1\leqslant n\leqslant 506)$.

不妨令 $b_n=a_j$，由条件①， $a_{j+1}=-a_j=4n-3$ 或 $a_{j+1}=a_j+4=-4n+7$，

均不为 $b_{n+1}=-4n-1$；

此时 $a_{j+2}=-4n+3$ 或 $4n+1$ 或 $4n-7$ 或 $-4n+11$，均不为 $b_{n+1}=-4n-1$.

上述情况中，当 $a_{j+1}=4n-3$， $a_{j+2}=4n+1$ 时， $a_{j+3}=-a_{j+2}=-4n-1=b_{n+1}$，

结合 $a_1=1$，则有 $a_{3n-1}=b_n$.

由 $b_{506}=-2021$，得 $m=3\times 506-1=1517$ 即为所求.

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）