

房山区 2023 年高三第一次模拟考试

数 学

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cup B =$
- (A) $[0, 1)$ (B) $[0, 1]$
(C) $(-1, 3]$ (D) $(-1, 3)$
- (2) 在 $(x - \frac{2}{x})^4$ 的展开式中, x^2 的系数是
- (A) -8 (B) 8
(C) -4 (D) 4
- (3) 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 满足 $a_n + a_1 = a_{n+1}$, 且 $a_1 = 1$, 则 a_5 等于
- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5
- (4) “ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ” 是 “ $\tan x < 1$ ” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (5) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 抛物线 C 上一点 P 到点 F 的距离为 3, 则点 P 到原点的距离为
- (A) 2 (B) 3
(C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$
- (6) 已知直线 $y + 1 = m(x - 2)$ 与圆 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ 相交于 M, N 两点, 则 $|MN|$ 的最小值为
- (A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$
(C) 4 (D) 6
- (7) 已知函数 $f(x)$ 同时满足以下两个条件:
- ① 对任意实数 x , 都有 $f(x) + f(-x) = 0$;
- ② 对任意实数 x_1, x_2 , 当 $x_1 + x_2 \neq 0$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2} < 0$.
- 则函数 $f(x)$ 的解析式可能为

(A) $f(x) = 2x$ (B) $f(x) = -2x$

(C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = -2^x$

(8) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = \sqrt{2}$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $|\overline{PA} + \overline{PB}|$ 的最大值为

(A) 16 (B) 10

(C) 8 (D) 4

(9) 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数. 人体的血氧饱和度正常范围是 $95\% \sim 100\%$, 当血氧饱和度低于 90% 时, 需要吸氧治疗. 在环境模拟实验室的某段时间内, 可以用指数模型: $S(t) = S_0 e^{Kt}$ 描述血氧饱和度 $S(t)$ 随给氧时间 t (单位: 时) 的变化规律, 其中 S_0 为初始血氧饱和度, K 为参数. 已知 $S_0 = 60\%$, 给氧 1 小时后, 血氧饱和度为 80% . 若使得血氧饱和度达到 90% , 则至少还需要给氧时间 (单位: 时) 为

(精确到 0.1, 参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 3 \approx 1.10$)

(A) 0.3 (B) 0.5

(C) 0.7 (D) 0.9

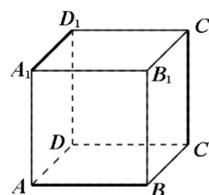
(10) 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则下列结论中正确的是

(A) 与三条直线 AB , CC_1 , D_1A_1 所成的角都相等的直线有且仅有一条

(B) 与三条直线 AB , CC_1 , D_1A_1 所成的角都相等的平面有且仅有一个

(C) 到三条直线 AB , CC_1 , D_1A_1 的距离都相等的点恰有两个

(D) 到三条直线 AB , CC_1 , D_1A_1 的距离都相等的点有无数个



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 在复平面内, 复数 z 对应点的坐标为 $(0, 1)$, 则 $(1+i) \cdot z = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 能够说明“设 a, b, c 是任意实数. 若 $a < b < c$, 则 $ac < bc$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$, 则双曲线 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin 2A$, $2a = \sqrt{3}b$, 则 $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{b}{c}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0, \\ x^2 + 4x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$ 给出下列四个结论:

① 函数 $f(x)$ 的值域是 \mathbf{R} ;

- ② $\forall a > 1$, 方程 $f(x) = a$ 恰有 3 个实数根;
- ③ $\exists x_0 \in \mathbf{R}^+$, 使得 $f(-x_0) - f(x_0) = 0$;
- ④ 若实数 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的最大值为

$$4e - \frac{4}{e}.$$

其中所有正确结论的序号是___.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 π .

(I) 求 ω 值;

(II) 再从条件①、条件②、条件③三个条件中选择一个作为已知, 确定 $f(x)$ 的解析式.

设函数 $g(x) = f(x) - 2\sin^2 x$, 求 $g(x)$ 的单调增区间.

条件①: $f(x)$ 是偶函数;

条件②: $f(x)$ 图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$;

条件③: $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$.

注: 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答给分.

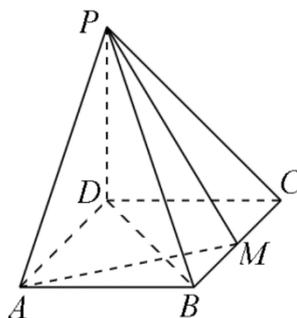
(17) (本小题 14 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$, M 为 BC 的中点.

(I) 求证: $AM \perp$ 平面 PBD ;

(II) 求平面 $ABCD$ 与平面 APM 所成角的余弦值;

(III) 求点 D 到平面 APM 的距离.



(18) (本小题 13 分)

某社区组织了一次公益讲座, 向社区居民普及垃圾分类知识. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后分别回答一份垃圾分类知识问卷, 这 10 位社区居民的讲座前和讲座后答卷的正确率如下表:

编号	1号	2号	3号	4号	5号	6号	7号	8号	9号	10号

正确率										
讲座前	65%	60%	70%	100%	65%	75%	90%	85%	80%	60%
讲座后	90%	85%	80%	95%	85%	85%	95%	100%	85%	90%

- (I) 从公益讲座前的 10 份垃圾分类知识答卷中随机抽取一份，求这份答卷正确率低于 80% 的概率；
- (II) 从公益讲座前、后所有正确率不低于 90% 的垃圾分类知识答卷中随机抽取 3 份，
记随机变量 X 为抽中讲座前答卷的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；
- (III) 判断此次公益讲座的宣传效果，并说明你的理由.

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $B(0, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (I) 求椭圆 E 的标准方程；
- (II) 若直线 l 与椭圆 E 相切，过点 $M(1, 0)$ 作直线 l 的垂线，垂足为 N ， O 为坐标原点，证明： $|ON|$ 为定值.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x}$.

- (I) 当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
- (II) 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间；
- (III) 求证：当 $0 < a < 1$ 时，关于 x 的不等式 $f(x) > 1$ 在区间 $[1, e]$ 上无解.

(21) (本小题 15 分)

如果数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n$ ，则称 $\{a_n\}$ 为“速增数列”.

- (I) 判断数列 $\{2^n\}$ 是否为“速增数列”？说明理由；

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 为“速增数列”，且任意项 $a_n \in \mathbf{Z}$ ， $a_1=1$ ， $a_2=3$ ， $a_k=2023$ ，

求正整数 k 的最大值；

(III) 已知项数为 $2k$ ($k \geq 2$ ， $k \in \mathbf{Z}$) 的数列 $\{b_n\}$ 是“速增数列”，且 $\{b_n\}$ 的所有项的和等于 k 。若

$c_n = 2^{b_n}$ ， $n=1,2,3,\dots,2k$ ，证明： $c_k c_{k+1} < 2$ 。

房山区 2023 年高三第一次模拟考试

数学答案及评分参考

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

(1) C (2) A (3) D (4) A (5) D

(6) C (7) B (8) D (9) B (10) D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11) $-1+i$ (12) $-3, -2, -1$ (答案不唯一)

(13) 2 (14) $\frac{\pi}{3}, 2$ (15) ②③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

解：(I) 因为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，所以 $\omega = 2$ 。

(II) 选择条件①：

方法一：因为 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 是偶函数，所以 $f(0) = \pm 1$ 。

所以 $\sin \varphi = \pm 1$ 。

因为 $0 < \varphi < \pi$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos 2x$ 。

所以 $g(x) = f(x) - 2\sin^2 x = \cos 2x - (1 - \cos 2x)$

$$= 2\cos 2x - 1.$$

因为 $y = \cos x$ 在 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上单调递增，

由 $-\pi + 2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)，

解得 $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)。

所以 $g(x)$ 的单递增区间为 $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$)。

方法二：因为 $f(x)$ 是偶函数，所以对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，即

$$\sin(-2x + \varphi) = \sin(2x + \varphi),$$

所以 $-2x + \varphi = \pi - (2x + \varphi) + 2k\pi$ ，解得 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 。

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. (以下与选择方法一相同)

选择条件②:

因为 $f(x)$ 图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

所以 $g(x) = f(x) - 2\sin^2 x$

$$\begin{aligned} &= \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - (1 - \cos 2x) \\ &= \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} + \cos 2x - 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x - 1 \\ &= \sqrt{3}(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x) - 1 \\ &= \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - 1. \end{aligned}$$

因为 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增,

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

所以 $g(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$.

选择条件③:

因为 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 所以 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

解得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

(以下与选择条件②相同)

(17)

(I) 证明: (方法一综合法) $\because PD \perp$ 面 $ABCD$, $AM \subset$ 面 $ABCD$,

$\therefore PD \perp AM$.

在矩形 $ABCD$ 中, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BM}$, 所以 $\triangle ABD \sim \triangle BMA$.

所以 $\angle ABD = \angle BMA$. 则 $\angle AOB = \angle MBD + \angle BMA = \angle MBD + \angle ABD = 90^\circ$.

所以 $BD \perp AM$.

又 $\because BD \cap PD = D$,

$\therefore AM \perp$ 面 PBD .

(方法二坐标法)

$\because PD \perp$ 面 $ABCD$, $\therefore PD \perp AD$, $PD \perp DC$

又因为底面 $ABCD$ 是矩形, $AD \perp DC$,

以 D 为原点, 分别以 DA , DC , DP 为 x , y , z 轴建立平面直角坐标系.

设 $B(2\sqrt{2}, 2, 0)$, 则 $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $M(\sqrt{2}, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$

$\therefore \overline{AM} = (-\sqrt{2}, 2, 0)$, $\overline{DB} = (2\sqrt{2}, 2, 0)$, $\overline{AP} = (-2\sqrt{2}, 0, 2)$

$\therefore \overline{AM} \cdot \overline{DB} = 0$, $\therefore AM \perp BD$.

$\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AM \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AM \perp PD$.

又 $\because BD \cap PD = D$,

$\therefore AM \perp$ 平面 PBD .

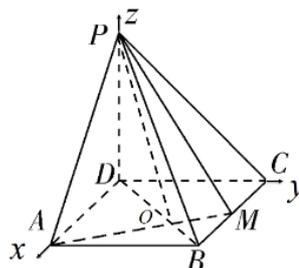
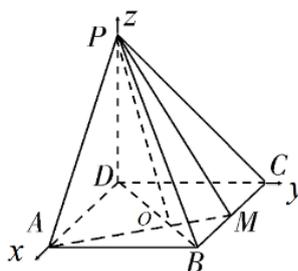
(II) (方法一) 由 (I) 可知 $\overline{AP} = (-2\sqrt{2}, 0, 2)$, $\overline{AM} = (-\sqrt{2}, 2, 0)$.

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$.

设平面 APM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AM} = -\sqrt{2}x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AP} = -2\sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases}$

取 $x = \sqrt{2}$ 得到 $\vec{n} = (\sqrt{2}, 1, 2)$,

则平面 $ABCD$ 与 APM 所成角的余弦值为



$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

(方法二综合法)

由 $\because AM \perp$ 面 PBD , $\therefore AM \perp PO$,

$\therefore \angle POD$ 是平面 $ABCD$ 与平面 APM 所成角的平面角.

在矩形 $ABCD$ 中, $DO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

在直角三角形 PDO 中, $PO = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

\therefore 平面 $ABCD$ 与 APM 所成角的余弦值为 $\cos \angle POD = \frac{DO}{PO} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

(III) (方法一坐标法)

$\because \overline{DA} = (2\sqrt{2}, 0, 0)$. 平面 APM 的法向量 $\vec{n} = (\sqrt{2}, 1, 2)$.

所以点 D 到平面 APM 的距离为 $d = \frac{|\overline{DA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|4|}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$.

(方法二综合法) $\therefore \sin \angle POD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle POD} = \sqrt{1 - (\frac{2}{\sqrt{7}})^2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

\therefore 点 D 到平面 APM 的距离为 $d = DO \cdot \sin \angle POD = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle POD} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - (\frac{2}{\sqrt{7}})^2} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$.

(18) (本小题 13 分)

解: (I) 记事件 A 为 “从公益讲座前的 10 份垃圾分类知识答卷中随机抽取一份, 这份答卷正确率低于 80%”.

在公益讲座之前, 10 份垃圾分类知识答卷正确率低于 80% 的有 6 人, 则

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

(II) 正确率不低于 90% 的垃圾分类知识答卷有 7 份, 其中讲座前的答卷有 2 份, X 的可能取值为 0, 1, 2:

$$P(X=0) = \frac{C_5^3 C_2^0}{C_7^3} = \frac{2}{7}; \quad P(X=1) = \frac{C_5^2 C_2^1}{C_7^3} = \frac{4}{7}; \quad P(X=2) = \frac{C_5^1 C_2^2}{C_7^3} = \frac{1}{7};$$

X 的分布列为

X	0	1	2
-----	---	---	---

P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$
-----	---------------	---------------	---------------

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

(III) 角度一：讲座前答卷正确率的平均值

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{10}(65\% + 60\% + 70\% + 60\% + 65\% + 75\% + 90\% + 85\% + 80\% + 100\%) = 75\%$$

讲座后答卷正确率的平均值为

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{10}(90\% + 85\% + 80\% + 90\% + 85\% + 85\% + 95\% + 100\% + 85\% + 95\%) = 89\%$$

因为 $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ，公益讲座后答卷正答率的平均值高于公益讲座前答卷正答率的平均值，公益讲座后社区居民答题水平提高，所以公益讲座有明显的效果；

角度二：平均值变大，且讲座前答卷的方差

$$s_1^2 = \frac{1}{10}[(65\% - 75\%)^2 + (60\% - 75\%)^2 + (70\% - 75\%)^2 + (60\% - 75\%)^2 + (65\% - 75\%)^2 + (75\% - 75\%)^2 + (90\% - 75\%)^2 + (85\% - 75\%)^2 + (80\% - 75\%)^2 + (100\% - 75\%)^2] = 1.65$$

同理计算讲座后答卷的方差 $s_2^2 = 0.34$

因为 $s_1^2 > s_2^2$ ，公益讲座之后社区居民答题正确率的方差小，整体水平高，并且比较集中，所以公益讲座有明显的效果；

角度三：公益讲座前答题正确率最小值为 60%，公益讲座之后答题的正确率最小值为 80%，讲座前的极差为：100% - 60% = 40%，讲座后的极差为：100% - 80% = 20%，

讲座后答卷正确率的变化范围比讲座前答卷正确率的变化范围小，公益讲座有效果。

(19) (本小题 15 分)

$$\text{解：(1) 由已知可得，} \begin{cases} b = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{解得 } a = \sqrt{2},$$

所以，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ①当切线 l 的斜率不存在时，直线 $l: x = \pm\sqrt{2}$ ，过点 $M(1,0)$ 作直线 l 的垂线为 $y=0$ ，即此时 $N(\sqrt{2},0)$ 或 $N(-\sqrt{2},0)$ ，则 $|ON| = \sqrt{2}$.

②当切线 l 的斜率为 0 时，直线 $l: y = \pm 1$ ，过点 $M(1,0)$ 作直线 l 的垂线为 $x=1$ ，即此时 $N(1,1)$ 或

$N(1, -1)$, $|ON| = \sqrt{2}$;

③当切线 l 的斜率存在且不为 0 时, 设 l 的方程为 $y = kx + m$,

$$\text{联立直线 } l \text{ 和椭圆 } E \text{ 的方程得 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

消去 y 并整理, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$,

因为直线 l 和椭圆 E 相切,

$\therefore \Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 2) = 0$, 化简并整理, 得 $m^2 = 2k^2 + 1$,

因为直线 MN 与 l 垂直, 所以直线 MN 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - 1)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x - 1) \\ y = kx + m \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1 - km}{1 + k^2} \\ y = \frac{k + m}{1 + k^2} \end{cases}, \text{ 即点 } N\left(\frac{1 - km}{1 + k^2}, \frac{k + m}{1 + k^2}\right).$$

$$\begin{aligned} \therefore |ON|^2 &= \frac{(1 - km)^2 + (k + m)^2}{(1 + k^2)^2} = \frac{k^2m^2 + k^2 + m^2 + 1}{(1 + k^2)^2} = \frac{(k^2 + 1)(m^2 + 1)}{(1 + k^2)^2} \\ &= \frac{m^2 + 1}{1 + k^2} = \frac{2k^2 + 2}{1 + k^2} = 2. \end{aligned}$$

所以, $|ON| = \sqrt{2}$.

综上所述, $|ON| = \sqrt{2}$ 为定值.

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\ln x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,

$f(1) = -1$, 切点 $(1, -1)$.

$f'(1) = 0$, 切线斜率 $k = 0$.

所以切线方程为 $y = -1$.

(II) 因为 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 所以 $f'(2) = 0$.

因为 $f'(x) = a - \frac{a+1}{x} + \frac{1}{x^2}$,

所以 $a - \frac{a+1}{2} + \frac{1}{4} = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2x^2},$$

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 或 $x = 2$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 随 x 的变化情况

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$, $(2,+\infty)$, 单调递减区间为 $(1,2)$.

(III) 证明: “ $f(x) > 1$ 在区间 $[1, e]$ 上无解”, 等价于 “ $f(x) \leq 1$ 在区间 $[1, e]$ 上恒成立”,
等价于 “ $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值 ≤ 1 ”.

$$f'(x) = a - \frac{a+1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2},$$

当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 或 $x = \frac{1}{a}$.

① 当 $\frac{1}{a} \geq e$ 时, $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减.

所以 $f(x) \leq f(1) = a - 1 < 1$, 不等式 $f(x) > 1$ 在区间 $[1, e]$ 上无解.

② 当 $\frac{1}{a} < e$ 时,

x	$(1, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, e)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(1)$ 或 $f(e)$.

$$\text{因为 } f(e) = ae - (a+1) - \frac{1}{e}, \quad f(e) - 1 = a(e-1) - 2 - \frac{1}{e} < (e-1) - 2 - \frac{1}{e} < 0,$$

所以 $f(e) < 1$,

又因为 $f(1) = a - 1 < 1$, 所以, $f(x) \leq 1$ 在区间 $[1, e]$ 上恒成立.

综上, 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $f(x) > 1$ 在区间 $[1, e]$ 上无解.

(21) (本小题 15 分)

解: (I) 数列 $\{2^n\}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2^{n+2} - 2^{n+1} = 2^{n+1}$, $a_{n+1} - a_n = 2^n$,

$$\text{所以 } (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0$$

所以, 数列 $\{2^n\}$ 为 “速增数列”

(II) 因为数列 $\{a_n\}$ 为“速增数列”, $a_1=1, a_2=3$, 且 $a_n \in \mathbf{Z}$.

所以, 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n$, $a_2 - a_1 = 2$,

所以, $a_3 - a_2 \geq 3, a_4 - a_3 \geq 4, \dots, a_k - a_{k-1} \geq k$.

相加得, $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_k - a_{k-1}) \geq 2 + 3 + \dots + k$,

即 $a_k - a_1 \geq \frac{(k-1)(k+2)}{2}$.

所以 $4044 \geq (k-1)(k+2)$.

$62 \times 65 = 4030, 63 \times 66 = 4158$, 所以 k 的最大值为 63.

(III)

方法一: (反证法)

假设, $c_k c_{k+1} \geq 2$.

因为 $\{b_n\}$ 是“速增数列”, 且所有项的和等于 k ,

所以 $b_{n+1} - b_n < b_{n+2} - b_{n+1}$, $b_1 + b_2 + \dots + b_{2k} = k$,

因为 $c_n = 2^{b_n}$, $b_n = \log_2 c_n$, $c_n > 0$

所以 $\log_2 c_{n+1} - \log_2 c_n < \log_2 c_{n+2} - \log_2 c_{n+1}$, 且 $\log_2 c_1 + \log_2 c_2 + \dots + \log_2 c_{2k} = k$.

所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$, 因此 $\frac{c_2}{c_1} < \frac{c_3}{c_2} < \frac{c_4}{c_3} < \dots < \frac{c_{2k}}{c_{2k-1}}$, 且 $c_1 c_2 c_3 \dots c_{2k} = 2^k$

所以对任意的 $m \leq k-1, m \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{c_{m+1}}{c_m} < \frac{c_{2k+1-m}}{c_{2k-m}}$, 即 $c_{m+1} c_{2k-m} < c_m c_{2k+1-m}$

所以 $c_1 c_{2k} > c_2 c_{2k-1} > c_3 c_{2k-2} > \dots > c_k c_{k+1} \geq 2$.

所以 $c_1 c_2 c_3 \dots c_{2k} > 2^k$, 与 $c_1 c_2 c_3 \dots c_{2k} = 2^k$ 矛盾,

所以假设错误, 所以 $c_k c_{k+1} < 2$.

方法二: 假设, $c_k c_{k+1} \geq 2$.

因为 $\{b_n\}$ 是“速增数列”, 且所有项的和等于 k ,

所以 $b_{n+1} - b_n < b_{n+2} - b_{n+1}$, 且 $b_1 + b_2 + \dots + b_{2k} = k$,

因为 $c_n = 2^{b_n}$,

所以 $2^{b_{n+1} - b_n} < 2^{b_{n+2} - b_{n+1}}$, 且 $2^{b_1 + b_2 + \dots + b_{2k}} = 2^k$

所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$, 因此 $\frac{c_2}{c_1} < \frac{c_3}{c_2} < \frac{c_4}{c_3} < \dots < \frac{c_{2k}}{c_{2k-1}}$, 且 $c_1 c_2 c_3 \dots c_{2k} = 2^k$

以下同方法一

方法三: 要证: $c_k c_{k+1} < 2$, 即 $2^{b_k} 2^{b_{k+1}} < 2$, 只需证: $b_k + b_{k+1} < 1$.

假设, $b_k + b_{k+1} \geq 1$.

因为 $\{b_n\}$ 是“速增数列”, 且所有项的和等于 k ,

所以 $b_{n+1} - b_n < b_{n+2} - b_{n+1}$, 且 $b_1 + b_2 + \dots + b_{2k} = k$,

所以 $b_2 - b_1 < b_3 - b_2 < b_4 - b_3 < \dots < b_{2k-1} - b_{2k-2} < b_{2k} - b_{2k-1}$,

所以 $b_1 + b_{2k} > b_2 + b_{2k-1} > \dots > b_k + b_{k+1} \geq 1$.

所以 $b_1 + b_2 + \dots + b_{2k} > k$, 与 $b_1 + b_2 + \dots + b_{2k} = k$ 矛盾.

所以假设错误, 所以 $b_k + b_{k+1} < 1$.

所以 $c_k c_{k+1} < 2$.

方法四: 要证: $c_k c_{k+1} < 2$, 即 $2^{b_k} 2^{b_{k+1}} < 2$, 只需证: $b_k + b_{k+1} < 1$.

由题意可知 $b_{2k} - b_{2k-1} > b_2 - b_1$, $b_{2k-1} - b_{2k-2} > b_3 - b_2$, \dots , $b_{k+2} - b_{k+1} > b_k - b_{k-1}$.

所以 $b_{2k} + b_1 > b_{2k-1} + b_2$, $b_{2k-1} + b_2 > b_{2k-2} + b_3$, \dots , $b_{k+2} + b_{k-1} > b_{k+1} + b_k$.

所以 $b_{2k} + b_1 > b_{2k-1} + b_2 > L > b_{k+1} + b_k$.

所以 $k = (b_{2k} + b_1) + (b_{2k-1} + b_2) + L + (b_{k+1} + b_k) > k(b_{k+1} + b_k)$.

所以 $b_k + b_{k+1} < 1$.

所以 $c_k c_{k+1} < 2$.

关注课外 100 网公众号，获取最有价值的试题资料



扫一扫 欢迎关注
课外100官方公众号