参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　（2）C　（3）C　（4）B　（5）D

（6）D　（7）A　（8）B　（9）A　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）162　（12）e　（13）$\frac{28}{3}$

（14）4　，3 或 4　（注：第一空 2 分，第二空 3 分）

（15）② ③　（注：对一个 3 分，对 2 个 5 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 14 分）

（Ⅰ）解：$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=(2x+x^2)e^x$　………3 分

（Ⅱ）解：$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}\cdot 2^x-\log_2 x\cdot 2^x\ln 2}{(2^x)^2}=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}-\log_2 x\cdot\ln 2}{2^x}$　………6 分

（Ⅲ）解：$f'(x)=\dfrac{\cos x\cdot(1+\cos x)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1}{1+\cos x}$　………10 分

（Ⅳ）解：$f'(x)=\dfrac{1}{1-2x}\cdot(1-2x)'=\dfrac{1}{1-2x}\cdot(-2)=\dfrac{-2}{1-2x}$　………14 分

（17）（本小题 13 分）

（Ⅰ）根据题中数据，该地区参与 A 快递公司调查的问卷共 120 份，

样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的问卷共 $29+47=76$ 份，

所以样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的频率为 $\frac{76}{120}=\frac{19}{30}$，

估计该地区客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率 $\frac{19}{30}$　………3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 $0,1,2$ ．　……… 4 分

记事件 C 为“从该地区 A 快递公司的样本调查问卷中随机抽取 1 份，该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”，事件 D 为“从该地区 B 快递公司的样 本调查问卷中随机抽取 1 份，该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”.

由题设知，事件 C, D 相互独立，且

$P(C)=\dfrac{24+56}{120}=\dfrac{2}{3}$，$P(D)=\dfrac{12+48}{80}=\dfrac{3}{4}$，　　　　　　　　………5 分

则 $P(X=0)=P(\overline{C}\overline{D})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$　　　　　　　　………6 分

$P(X=1)=P(\overline{C}D\cup C\overline{D})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$　　　　　　　　………7 分

$P(X=2)=P(CD)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$　　　　　　　　………8 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{2}$

………9 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{12}+1\times\dfrac{5}{12}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{12}$.　　　　　　　　………10 分

（III）答案不唯一.

答案示例 1：小王选择 A 快递公司合适，理由如下：

根据样本数据，估计 A 快递公司配送时效评价为“优秀”的概率是 $\dfrac{29}{120}$，估计 B 快递公司配送时效评价为“优秀”的概率是$\dfrac{1}{5}$，因为 $\dfrac{29}{120}>\dfrac{1}{5}$，故小王选择 A 快递公司合适.

答案示例 2：小王选择 B 快递公司合适，理由如下：

由（I）知，估计 A 快递公司配送时效评价为“良好”以上的概率是 $\dfrac{19}{30}$；由样本数据可知，估计 B 快递公司配送时效评价为“良好”以上的概率是 $\dfrac{16+40}{80}=\dfrac{56}{80}=\dfrac{7}{10}$，因为 $\dfrac{19}{30}<\dfrac{7}{10}$，故小王选择 B 快递公司合适.　　………13 分

（18）(本小题 13 分)

（I）设“甲比乙的步数多”为事件 A .

在 11 月 4 日至 11 月 10 日这七天中，11 月 5 日与 11 月 9 日这两天甲比乙步数多，

所以 $P(A)=\dfrac{2}{7}$.　　　　　　　　………3 分

（II）由图可知，7 天中乙的步数不少于 20000 步的天数共 2 天.

X 的所有可能取值为 $0,1,2$　　　　　　　　………4 分

$P(X=0)=\frac{C_5^3C_2^0}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{1}{7}$ ………7 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

………8 分

$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$ ………10 分

（Ⅲ）11 月 6 日． ………13 分

（19）（本小题 15 分）

（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}4\sqrt{a^2+b^2}=16,\\ 2c=4\sqrt{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=4.\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$． ………………5 分

（Ⅱ）若存在定点 D，使得 $\frac{|DM|}{|PQ|}=\frac{1}{2}$，等价于以 PQ 为直径的圆恒过定点 D．

当直线 l 的斜率不存在时，PQ 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=4$ ①， ……… 6 分

当直线 l 的斜率为 0 时，令 $y=1$，得 $x=\pm3$， ……… 7 分

因此 PQ 为直径的圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=9$ ②.

联立①②得 $\begin{cases}x=0,\\ y=-2,\end{cases}$ 猜测点 D 的坐标为 $(0,-2)$． ……… 8 分

设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+6kx-9=0$． ……… 9 分

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-\frac{6k}{3k^2+1},x_1x_2=-\frac{9}{3k^2+1}$． ……… 11 分

所以 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}=(x_1,y_1+2)\cdot(x_2,y_2+2)$ ……… 12 分

$=x_1x_2+(y_1+2)(y_2+2)$

$=x_1x_2+(kx_1+3)(kx_2+3)$

$=(k^2+1)x_1x_2+3k(x_1+x_2)+9$ ········· 14 分

$=(k^2+1)\left(-\dfrac{9}{3k^2+1}\right)+3k\left(-\dfrac{6k}{3k^2+1}\right)+9$

$=0.$

综上，存在定点 $D(0,-2)$，使得 $\dfrac{|DM|}{|PQ|}=\dfrac{1}{2}$. ········· 15 分

（20）（本小题 15 分）

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\ln(x-1)$，

则 $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{x-1}$， ········· 1 分

故 $f'(2)=-2+1=-1$，$f(2)=1$， ········· 2 分

$y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $y=-x+3$ ········· 3 分

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{-2m}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-2m+(x-1)^2}{(x-1)^3}$， ········· 4 分

当 $m\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0, f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递增，此时无极值点， ········· 5 分

当 $m>0$ 时，

令 $f'(x)=\dfrac{-2m+(x-1)^2}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=1+\sqrt{2m}$ 或 $x=1-\sqrt{2m}$， ········· 6 分

要使得 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上存在极值，

则需要 $x=1+\sqrt{2m}>2$，解得 $m\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ ········· 7 分

（Ⅲ）令 $f(x)=\dfrac{m}{(x-1)^2}+\ln(x-1)=0\Rightarrow m=-(x-1)^2\ln(x-1)$，

令 $t=x-1>0$，则 $m=-t^2\ln t$， ········· 8 分

记 $g(t)=-t^2\ln t$，则 $g'(t)=-2t\ln t-t=-t(2\ln t+1)$， ········· 9 分

当 $t>e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$g'(t)<0, g(t)$ 单调递减， ········· 10 分

当 $0<t<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$g'(t)>0, g(t)$ 单调递增，且 $g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2e}$， ········· 11 分

当 $t<1$ 时，$g(t)>0$，

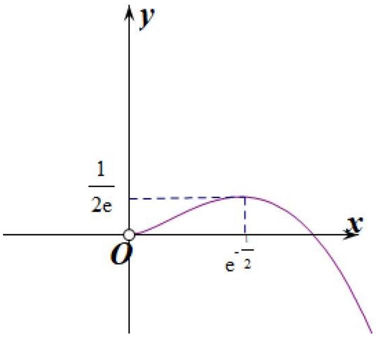
而当 $t=e^2$ 时，$g(t)=-e^4\cdot 2=-2e^4<0$， ········· 12 分

作出 $g\left(t\right)$ 的大致图象如下：

故当 $m>\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，无零点，　　　　　　　　　　　　……… 13 分

当 $m=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 或 $m\le 0$ 时，一个零点，　　　　　　　　　……… 14 分

当 $0<m<\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，两个零点，　　　　　　　　　　　　……… 15 分



注：学生如果用其他方法，按步骤给分

（21）(本小题 15 分)

（Ⅰ）由题设 $b_1=|0-1|=1\le b_2=|1-a_3|$，则 $|1-a_3|\ge 1$，即 $1-a_3\le -1$ 或 $1-a_3\ge 1$，

所以 $a_3\ge 2$ 或 $a_3\le 0$，任意两项均不相等，故 $a_3\ne 0$、$a_3\ne 1$，

故 a_3 的取值范围 $a_3\in(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$ 且 $a_3\in\mathbf{Z}$；　　　　　　　……… 4 分

（Ⅱ）由 $\{a_n\}$ 各项均为整数，任意两项均不相等，要使 $\sum\limits_{i=1}^{5}\left|a_i\right|$ 最小，即 $\left|a_i\right|$ 尽量小，

则 $(\sum\limits_{i=1}^{5}\left|a_i\right|)_{\min}=0+1+1+2+2$，故 $\{a_n\}$ 中的前 5 项为 $-2,-1,0,1,2$，……… 5 分

要使 $\sum\limits_{i=1}^{4}b_i$ 最大，即 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_5|$ 最大，　……… 6 分

而 $b_i\le b_{i+1}$，则 $|a_1-a_2|\le|a_2-a_3|\le|a_3-a_4|\le|a_4-a_5|$

$\left|a_4-a_5\right|$ 尽可能大，所以 $\left|a_4-a_5\right|=4$，所以 $a_4-a_5=\pm 4$

所以，$\begin{cases}a_4=2\\a_5=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=-2\\a_5=2\end{cases}$

不妨令 $a_5=2$，只需依次使 $|a_4-a_5|,|a_3-a_4|,|a_2-a_3|,|a_1-a_2|$ 取到最大，

要使 $|a_4-a_5|$ 最大，则 $a_4=-2$；　　　　　　　　　　　　　　　……… 7 分

要使 $|a_3-a_4|$ 最大，则 $a_3=1$；　　　　　　　　　　　　　　　　……… 8 分

要使 $|a_2-a_3|$ 最大，则 $a_2=-1$，故 $a_1=0$；　　　　　　　　　　……… 9 分

此时 $|a_4-a_5|=4>|a_3-a_4|=3>|a_2-a_3|=2>|a_1-a_2|=1$，

综上，$\left(\sum_{i=1}^{4} b_i\right)_{\max} = 1+2+3+4=10$. ········ 10 分

（III）对于$1 \le a_i \le m\left(i=1,2,\ldots,m\right)$，则$\sum_{k=1}^{m-1} b_k$的最小值为$m-1$，而$\sum_{k=1}^{m-1} b_k = m+1 > m-1$，

由$(m+1)-(m-1)=2$，且$b_i \le b_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,m-2\right)$，

所以$\{b_{m-1}\}$有如下情况：①最后一项为 3，前面各项都为 1；②最后两项为 2，前面各项都为 1；

$m=3$，数列$\{b_{m-1}\}$不可能出现 3，或同时出现两个 2，排除；

$m=4$，数列$\{a_m\}$为$3,2,1,4$，对应数列$\{b_{m-1}\}$为$1,1,3$，故存在满足题设的情况；

$m=5$，以下过程中$x \in \mathrm{N}^*$，

若存在满足①的数列$\{b_{m-1}\}$元素依次为$1,1,1,3$，

令数列$\{a_m\}$前 4 项为$x,x+1,x+2,x+3$，则第 5 项为x（存在重复项，舍）或$x+6$，

而第 5 项为$x+6>5$，不满足题设；

若存在满足②的数列$\{b_{m-1}\}$元素依次为$1,1,2,2$，

令数列$\{a_m\}$前 3 项为$x,x+1,x+2$，则第 4 项为x（存在重复项，舍）或$x+4$，

第 4 项为$x+4$，则第 5 项为$x+2$（存在重复项，舍）或$x+6$，而$x+6>5$不满足题设；

同上讨论，$m \ge 6$时不可能存在满足题设的数列$\{a_m\}$；

综上，$m=4$. ········ 15 分