石景山区 2023-2024 学年第一学期高三期末试卷

数 学

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-2,0,2,4\}$， $B=\{x\,|\,x^2\leqslant 4\}$，则 $A\bigcap B=$

（A）$\{-2,0,2\}$　　（B）$\{0,2\}$

（C）$\{-2,2\}$　　（D）$\{0,2,4\}$

（2）已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$， z_1,z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，则 $z_1\cdot z_2=$

（A）5　　（B）-5　　（C）$4+2\mathrm{i}$　　（D）$-4+2\mathrm{i}$

（3）$(x^2-\dfrac{2}{x})^4$ 展开式中含 x^5 的项的系数为

（A）4　　（B）-4　　（C）8　　（D）-8

（4）已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,m)$， $\boldsymbol{b}=(2,-2)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$， 则 $m=$

（A）-1　　（B）1　　（C）2　　（D）-2

（5）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=15$， $S_5=65$，则 $a_1+a_4=$

（A）24　　（B）26　　（C）28　　（D）30

（6）直线 $2x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-4=0$ 有两个不同交点的一个充分不必要条件是

（A）$-5<m<3$　　（B）$0<m<5$

（C）$-9<m<3$　　（D）$-7<m<3$

（7）设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(2-x), x<1\\ 2^{x-1}, \quad x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_2 10)=$

（A）2　　（B）5　　（C）7　　（D）10

（8）在 $\triangle ABC$ 中，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，则 $\angle A=$

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{2}$　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

（9）设函数 $f(x)=\ln|x+1|-\ln|x-1|$，则 $f(x)$ 是

（A）偶函数，且在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增

（B）奇函数，且在区间 $(-1,1)$ 单调递减

（C）偶函数，且在区间 $(-\infty,-1)$ 单调递增

（D）奇函数，且在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减

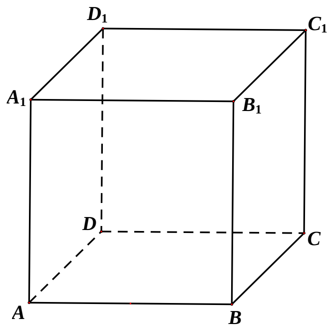
（10）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在正方形 ADD_1A_1 内（不含边界），则在正方形 DCC_1D_1 内（不含边界）一定存在一点 Q，使得

（A）$PQ // AC$

（B）平面 PQC_1 // 平面 ABC

（C）$PQ \perp AC$

（D）$AC \perp$ 平面 PQC_1



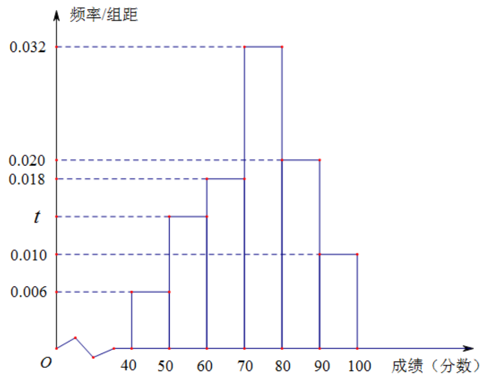
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{4-x}+\lg(x+3)$ 的定义域为____________.

（12）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，则该双曲线的离心率为____________.

（13）某学校从全校学生中随机抽取了 50 名学生作为样本进行数学知识测试，记录他们的成绩，测试卷满分 100 分，将数据分成 6 组：[40,50)，[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]，并整理得到如右频率分布直方图，则图中的 t 值为_______，若全校学生参加同样的测试，估计全校学生的平均成绩为__________（每组成绩用中间值代替）.



（14）已知命题 p：若 $a+b\geqslant 1$，则 $a^3+b^3\geqslant 1$．能说明 p 为假命题的一组 a,b 的值为 $a=$______ ， $b=$_______.

（15）在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_{n+1}=f(a_n)$，给出下列四个结论：

①若 $f(x)=-2x$，则 $\{a_n\}$ 一定是递减数列；

②若 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\{a_n\}$ 一定是递增数列；

③若 $f(x)=x^3+1$， $a_1\in(-1,0)$，则对任意 $c>0$，都存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>c$；

④ 若 $f(x)=kx^2+1(k>0)$， $a_1=1$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<2$，则 k 的最大值是 $\frac{1}{4}$.

其中所有正确结论的序号是___________.

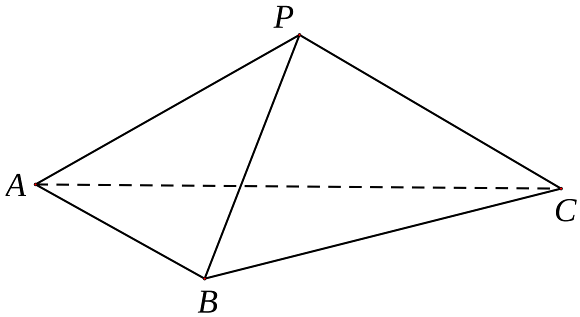
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$PA=PC=PB=2$，$AB=BC$，$\angle APC=\dfrac{2\pi}{3}$.

（Ⅰ）求证：$AC\perp PB$；

（Ⅱ）求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



（17）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-2\sin^2\dfrac{\omega}{2}x+1\quad(\omega>0)$.

（Ⅰ）若 $\omega=2$，求 $f(\dfrac{\pi}{12})$ 的值；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减，再从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω 的值.

条件 ①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(\dfrac{\pi}{12},3)$；

条件 ②：$x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 时，$f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$；

条件 ③：$x=\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

某学校体育课进行投篮练习，投篮地点分为 A 区和 B 区，每一个球可以选择在 A 区投篮也可以选择在 B 区投篮，在 A 区每投进一球得 2 分，没有投进得 0 分；在 B 区每投进一球得 3 分，没有投进得 0 分.学生甲在 A， B 两区的投篮练习情况统计如下表：

甲	A 区	B 区
投篮次数	30	20
得分	40	30

假设用频率估计概率，且学生甲每次投篮相互独立.

（Ⅰ）试分别估计甲在 A 区， B 区投篮命中的概率；

（Ⅱ）若甲在 A 区投 3 个球，在 B 区投 2 个球，求甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率；

（Ⅲ）若甲在 A 区，B 区一共投篮 5 次，投篮得分的期望值不低于 7 分，直接写出甲选择在 A 区投篮的最多次数.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 $2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过坐标原点 O 且不与坐标轴重合的直线 l 交椭圆 C 于 P ， Q 两点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 E ，直线 QE 与椭圆的另一个交点为 M ．求证：$\triangle MPQ$ 为直角三角形.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1-x)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f(x)>-\dfrac{1}{2}x^2-x$ ；

（Ⅲ）设实数 k 使得 $f(x)>kx^2-x$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立，求 k 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

对于项数为 m 的数列 $\{a_n\}$ ，若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ ，$(k=1,2,\cdots,m)$ ，其中， $\max M$ 表示数集 M 中最大的数，则称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的 P 数列.

（Ⅰ）若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的 P 数列是 $3,4,4,5$ ，写出所有的数列 $\{a_n\}$ ；

（Ⅱ）证明：若数列 $\{a_n\}$ 中存在 a_i 使得 $a_i>a_1\ (2\leqslant i\leqslant m)$ ，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 使得 $b_{k+1}>b_k$ 成立；

（Ⅲ）数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的 P 数列，数列 $\{c_n\}$ 是 $\{-a_n\}$ 的 P 数列，定义

$d_n=\left|\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(a_n-a_i)\right|$ ，其中 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$. 求证：$\{b_n+c_n\}$ 为单调递增数列的充要条件是 $\{d_n\}$ 为单调递增数列.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）