

# 2024 北京怀柔高二（下）期末

## 数 学

2024. 7

注意事项:

1. 考生要认真填写姓名和考号.
2. 本试卷分第一部分（选择题）和第二部分（非选择题），共 150 分，考试时间 120 分钟.
3. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡的对应位置，在试卷上作答无效. 第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答.
4. 考试结束后，考生应将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回.

### 第一部分 选择题（共 40 分）

一、**选择题**（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 集合  $A = \{x | x + 2 \geq 0\}$ ,  $B = \{x | -3 < x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{x | -2 \leq x < 1\}$     B.  $\{x | x > -3\}$     C.  $\{-2, -1, 0\}$     D.  $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 等比数列  $\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \dots$  则数列的第七项为

- A. 32    B. -32    C. 64    D. -64

3. 在二项式  $(x - \frac{2}{x})^6$  的展开式中，常数项为

- A. 20    B. -40    C. 80    D. -160

4. 已知函数  $f(x) = \sin x + 1$ , 则  $f'(\frac{\pi}{3})$  的值为

- A.  $-\frac{1}{2}$     B.  $\frac{1}{2}$     C.  $\frac{3}{2}$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

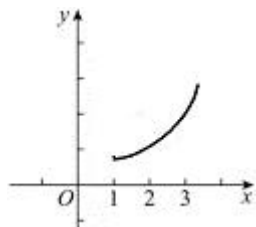
5. 某次考试学生甲还有四道单选题不会做，假设每道题选对的概率均为  $\frac{1}{4}$ , 则四道题中恰好做对 2 道的概率是

- A.  $\frac{9}{256}$     B.  $\frac{27}{256}$     C.  $\frac{27}{128}$     D.  $\frac{81}{256}$

6. 2021 年 7 月 20 日，公布了《中共中央、国务院关于优化生育政策促进人口长期均衡发展的决定》，决定实施一对夫妻可以生育三个子女的政策及配套的支持措施。假设生男、生女的概率相等，如果一对夫妻计划生育三个小孩，在已经生育了两个男孩的情况下，第三个孩子是女孩的概率为

- A.  $\frac{1}{8}$     B.  $\frac{1}{4}$     C.  $\frac{1}{3}$     D.  $\frac{1}{2}$

7. 已知函数  $y = f(x)$  的图象如图所示，则下列各式中正确的是



- A.  $f'(1) > f(3) - f(2) > f'(3)$                       B.  $f'(3) > f'(1) > f(3) - f(2)$   
 C.  $f'(3) > f(3) - f(2) > f'(1)$                       D.  $f'(1) > f'(3) > f(3) - f(2)$

8. 若  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 > 0$ , 则“ $0 < q < 1$ ”是“ $S_n$  单调递增”的

- A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件    C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

9. 设函数  $f(x) = \frac{b}{x} + x^2 e^{a-x}$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = 2e$ , 则  $a, b$  值分别为

- A.  $a = e, b = 1$     B.  $a = 2, b = e$     C.  $a = 1, b = 1$     D.  $a = 1, b = e$

10. 若函数  $f(x) = xe^x - ax$ , 则根据下列说法选出正确答案是

- ① 当  $a \in (-\infty, -e^{-2}]$  时,  $f(x)$  在  $x \in R$  上单调递增;  
 ② 当  $a \in (-e^{-2}, 0)$  时,  $f(x)$  有两个极值点;  
 ③ 当  $a \in (-\infty, -e^{-2}]$  时,  $f(x)$  没有最小值.

- A. ①②                      B. ②③                      C. ①③                      D. ①②③

## 第二部分 非选择题 (共 110 分)

二、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 若  $a_1 = 7, a_5 = -1$ , 则  $a_n =$  \_\_\_\_\_; 前  $n$  项和  $S_n$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

12. 若随机变量  $X$  的分布列为 (如表), 则  $a =$  \_\_\_\_\_;

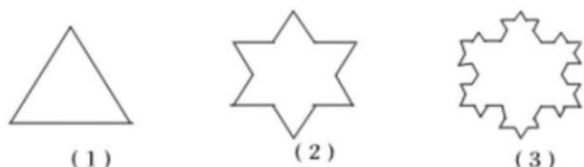
若随机变量  $Y = 2X + 1$ , 则随机变量  $Y$  的数学期望  $E(Y) =$  \_\_\_\_\_ . (用数字作答)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$a$	$\frac{1}{3}$

13. 若  $(1+x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ ,

则  $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 =$  \_\_\_\_\_ . 32

14. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学, 分形几何具有自身相似性, 从它的任何一个局部经过放大, 都可以得到一个和整体全等的图形. 例如图 (1) 是一个边长为 1 的正三角形, 将每边 3 等分, 以中间一段为边向外作正三角形, 并擦去中间一段, 得到图 (2), 如此继续下去, 得到图 (3), 则第三个图形的边数 \_\_\_\_\_; 第  $n$  个图形的周长 \_\_\_\_\_.



15. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = n^2 - 2an$ , 则下列各项说法正确的是 \_\_\_\_\_ . (填写所有正确选项的序号)

①当  $a = -1$  时, 数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ ;

②若数列  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 则  $a \in (-\infty, 1]$ ;

③  $\forall a \in R$ , 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项积既有最大值又有最小值;

④若  $\forall n \in N^*$ ,  $a_n \geq -4$  恒成立, 则  $a \in (-\infty, 2]$ .

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.)

16 (本小题 13 分) 某学校对食堂饭菜质量进行满意度调查, 随机抽取了 200 名学生进行调查, 获取数据如下:

性别 \ 满意度	满意	不满意	弃权
男生	80	30	10
女生	50	20	10

(I) 用频率估计概率, 该校学生对食堂饭菜质量满意的概率;

(II) 用分层抽样的方法从上表中不满意的 50 人中抽取 5 人征求整改建议, 再从这 5 个人中随机抽取 2 人参与食堂的整改监督, 则抽取的 2 人中女生的人数  $X$ , 求  $X$  的分布列和期望.

17. (本小题 13 分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_4 = 10, S_3 = 18$ .

(I) 求等差数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 若各项均为正数的数列  $\{b_n\}$  其前  $n$  项和为  $T_n$ , 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 设  $c_n = a_n + b_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式和数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $M_n$ .

条件①:  $T_n = 3^n - 1$ ;

条件②:  $b_1 = 2, \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$ ;

条件③:  $\forall n \geq 2$  且  $n \in Z$ , 都有  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$  成立,  $b_1 = 2, b_3 = S_3$ .

18. (本小题 14 分) 设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ ,

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[-4, 3]$  上的最大值与最小值;

(III) 若方程  $f(x) = b$  在  $x \in R$  有三个不同的根, 求  $b$  的取值范围.

19. (本小题 15 分) 为了了解高三学生的睡眠情况, 某校随机抽取了部分学生, 统计了他们的睡眠时间, 得到以下数据 (单位: 小时):

男生组: 5, 5.5, 6, 7, 7, 7.5, 8, 8.5, 9;

女生组: 5.5, 6, 6, 6, 6.5, 7, 7, 8.

用频率估计概率, 且每个学生的睡眠情况相互独立.

- (I) 世界卫生组织建议青少年每天最佳睡眠时间应保证在 8-10 (含 8 小时) 小时, 估计该校高三学生睡眠时间在最佳范围的概率;
- (II) 现从该校的男生和女生中分别随机抽取 1 人,  $X$  表示这 2 个人中睡眠时间在最佳范围的人数, 求  $X$  的分布列和数学期望  $E(X)$ ;
- (III) 原女生组睡眠时间的样本方差为  $s_0^2$ , 若女生组中增加一个睡眠时间为 6.5 小时的女生, 并记新得到的女生组睡眠时间的样本方差为  $s_1^2$ . 写出  $s_0^2$  与  $s_1^2$  的大小关系. (结论不要求证明)

20 (本小题 15 分) 已知函数  $f(x) = a \ln x + x^2$ , 其中  $a \in R$

- (I) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
- (II) 当曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $y = -x$  垂直时, 若函数  $y = f(x)$  的图象总在函数  $g(x) = bx$  图象的上方, 则  $b$  的取值范围.

21 (本小题 15 分) 已知数集  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2$ ), 若对任意的  $i, j$

( $1 \leq i < j \leq n$ ),  $a_i a_j$  与  $\frac{a_j}{a_i}$  两数中至少有一个属于  $A$ , 则称数集  $A$  具有性质  $P$ .

- (I) 分别判断数集  $B = \{1, 2, 4\}$  与数集  $C = \{1, 3, 5, 7\}$  是否具有性质  $P$ , 并说明理由;
- (II) 若数集  $A$  具有性质  $P$ .
  - (i) 当  $n = 3$  时, 证明  $a_1 = 1$ , 且  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列;
  - (ii) 证明:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ .