参考答案

一、　选择题：本题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	A	A	D	B	C	D	C	A	B	D

二、填空题：本题共 5 道小题，每小题 5 分，共 25 分.

题号	（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
答案	$a_n=-2n+9$；16	$\frac{1}{2};\frac{16}{3}$	32	48；$3\times(\frac{4}{3})^{n-1}$	①　④

注：1.（11）（12）作对一个给 3 分，作对二个给 5 分.

2.(14)第一空 2 分，第二空 3 分.

3.(15)选对一个给 3 分，选对二个给 5 分，多选不给分.

三、解答题：本题共 6 道小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【解析】

（I）设“对食堂饭菜质量满意”为事件 A.　　------1 分

在 200 人中对饭菜质量满意的有 130 人　　------ 3 分

$\therefore p(A)=\frac{13}{20}$　　------ 5 分

（II）分层抽取比例 $\lambda=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$

男生抽取人 $30\times\frac{1}{10}=3$，女生抽取 $20\times\frac{1}{10}=2$ 人　　------ 7 分

抽取的 2 人中女生人数 X 的所有可能为 0，1，2　　---------8 分

$P(X=0)=\frac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\frac{3}{10}$　　-----9 分

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$　　-------10 分

$P(X=2)=\frac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$　　--------11 分

X	X=0	X=1	X=2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$　　------13 分

17.【解析】

（I）已知等差数列$\{a_n\}$中，满足$a_4=10, S_3=18$.

$$\begin{cases} a_4=a_1+3d=10 \\ S_3=3a_1+3d=18 \end{cases} \quad 解得\begin{cases} a_1=4 \\ d=2 \end{cases}$$ -------- 4 分

$\therefore a_n=2n+2$ ---------- 5 分

（II） 选条件①

$\because T_n=3^n-1$.

$\therefore n=1$时，$b_1=3-1=2$

当$n\geq 2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)=2\cdot 3^{n-1}$

当$n=1$时，$b_1=2\cdot 3^0=2$

$\therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}$ ---------- 8 分

$\because \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2\cdot 3^n}{2\cdot 3^{n-1}}=3$

$\therefore \{b_n\}$是以2为首项,3为公比的等比数列. --------- 9 分

$c_n=a_n+b_n=(2n+2)+2\cdot 3^{n-1}$的前$n$项和$M_n$

$$\begin{aligned} M_n &= 4+2\cdot 3^0+6+2\cdot 3+8+2\cdot 3^2+\dots\dots+(2n+2)+2\cdot 3^{n=1} \\ &= (4+6+8+\dots\dots+2n+2)+2(3^0+3+3^2+3^3+\dots+3^{n-1}) \\ &= \frac{[4+(2n+2)]n}{2}+2\frac{1-3^n}{1-3}=n(n+3)+3^n-1 \end{aligned}$$ --------13分

（II） 选条件②

$\because b_1=2$,$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=3$ $\quad\therefore \{b_n\}$是以2为首项,3为公比的等比数列。 ------- 7 分

$\therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}$

--------- 9 分

$c_n=a_n+b_n=(2n+2)+2\cdot 3^{n-1}$的前$n$项和$M_n$

$$\begin{aligned} M_n &= 4+2\cdot 3^0+6+2\cdot 3+8+2\cdot 3^2+\dots\dots+(2n+2)+2\cdot 3^{n=1} \\ &= (4+6+8+\dots\dots+2n+2)+2(3^0+3+3^2+3^3+\dots+3^{n-1}) \\ &= \frac{[4+(2n+2)]n}{2}+2\frac{1-3^n}{1-3}=n(n+3)+3^n-1 \end{aligned}$$ ------13分

（II） 选条件③

$\because \forall n\geq 2且n\in Z$, 都有$b_n{}^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$成立， $\therefore \{b_n\}$为等比数列。 --------- 6 分

$\because b_1=2, b_3=S_3 \quad \therefore \begin{cases} b_1=2 \\ b_3=s_3=b_1q^2=18 \end{cases}$

$\therefore q^2=9, q=\pm 3$(舍负) ----------8 分

$\therefore \{b_n\}$是以2为首项,3为公比的等比数列。

$\therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}$ ------ 9 分

$c_n=a_n+b_n=(2n+2)+2\cdot 3^{n-1}$ 的前 n 项和 M_n

$$M_n=4+2\cdot 3^0+6+2\cdot 3+8+2\cdot 3^2+........+(2n+2)+2\cdot 3^{n=1}$$
$$=(4+6+8+........+2n+2)+2(3^0+3+3^2+3^3+....+3^{n-1})$$
$$=\frac{[4+(2n+2)]n}{2}+2\frac{1-3^n}{1-3}=n(n+3)+3^n-1$$ ------- 13分

18.【解析】

(I) $x=0$ 代入得到 $f(0)=1$ 即切点坐标(0,1) ------1 分

$\because$ 由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$,得 $f'(x)=x^2+2x-3$.

$\therefore f'(0)=—3$ -------3 分

所以曲线 y= $f(x)$ 在点(0, $f(x)$)处的切线方程为 $y=-3x+1$ ------ 5 分

(II) $x\in[-4,3]$

$\because$ 由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$,得 $f'(x)=x^2+2x-3$.

令 $f'(x)=0$,得 $x^2+2x-3=0$,解得 $x=-3$ 或 $x=1$ -------- 6 分

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间$\in[-4,3]$上的情况如下:

$f(x)$ 在区间$[-4,3]$上,

x	-4	(-4,-3)	-3	(-3,1)	1	(1,3)	3
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
$f(x)$	$\frac{23}{3}$	↗	10	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	10

当 x=-3 或 x=3 时, $f(x)$ 最大值为 10;当 x=1 时, $f(x)$ 最小值为$-\frac{2}{3}$。 -- 10 分

(没画表格,写清调递区间 8 分,求对最值 10 分)

(III)若方程 $f(x)=b$ 在 $x\in R$ 上有三个不同的根

可得 y= $f(x)$ 的图象与直线 y= b 有 3 个交点. -----11 分

x	(-∞,-3)	-3	(-3,1)	1	(1,+∞)

$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	10	↘	$-\frac{2}{3}$	↗

由（II）可知

当 $x \to +\infty$时，$f(x) \to +\infty$

当 $x \to -\infty$时，$f(x) \to -\infty$

所以$b \in (-\frac{2}{3},10)$时，方程 $f(x)=b$ 有三个不同根．　　-----14 分

18.（本小题 15 分）

为了了解高三学生的睡眠情况，某校随机抽取了部分学生，统计了他们的睡眠时间，得到以下数据（单位：小时）：

男生组：5，　5.5，　6，　7，　7，　7.5，　8，　8.5，　9；

女生组：5.5，　6，　6，　6,　6.5，　7，　7，　8．

用频率估计概率，且每个学生的睡眠情况相互独立．

（I）世界卫生组织建议青少年每天最佳睡眠时间应保证在 8-10（含 8 小时）小时，估计该校高三学生睡眠时间在最佳范围的概率；

（II）现从该校的男生和女生中分别随机抽取 1 人，X 表示这 2 个人中睡眠时间在最佳范围的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III）原女生组睡眠时间的样本方差为 s_0^2，若女生组中增加一个睡眠时间为 6.5 小时的女生，并记新得到的女生组睡眠时间的样本方差为 s_1^2．写出 s_0^2 与 s_1^2 的大小关系．(结论不要求证明)

【解析】

（I）设“该校高三学生的睡眠时间在最佳范围”为事件 A　　-------1 分

在随机抽取的 17 人中有 4 人的睡眠时间在最佳范围　　-------2 分

所以 $P(A)=\frac{4}{17}$　　-------4 分

（II）由题意，“从男生中随机选出 1 人,其睡眠时间在最佳范围”为事件 B,

$P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$　　------5 分

“从女生中随机选出 1 人，其睡眠时间在最佳范围”为事件 C,

$P(C)=\frac{1}{8}$.　　-------6 分

由条件可知，X 的所有可能取值为 0，1，2．　　-------7 分

$P(X=0)=(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{8})=\frac{7}{12}$;

$P(X=1)=(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{8})=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$;

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$. ---------10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$

$E(X)=0\times\frac{14}{24}+1\times\frac{9}{24}+2\times\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$ --------12 分

（III）$s_0^2>s_1^2$． --------15 分

20（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2$ ，其中 $a\in R$

（I） 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）当曲线 $y=f(x)$ 在点(1，$f(1)$)处的切线与直线 y=-x 垂直时，若函数 $y=f(x)$ 的图象总在函数 $g(x)=bx$ 图象的上方，则 b 的取值范围.

【解析】

（I）因为 $f(x)=a\ln x+x^2$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$ ------1 分

$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{2x^2+a}{x}$ ------2 分

当 $a\geq0$ 时，$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{2x^2+a}{x}\geq0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，无减区间； -------4 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{2x^2+a}{x}=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{-2a}}{2}$ 舍负，

x	$(0,-\frac{\sqrt{-2a}}{2})$	$-\frac{\sqrt{-2a}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{-2a}}{2},+\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的减区间为 $(0,-\frac{\sqrt{-2a}}{2})$，增区间为 $(-\frac{\sqrt{-2a}}{2},+\infty)$.

综上所述，当 $a\geq0$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，无减区间；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为$(0,-\frac{\sqrt{-2a}}{2})$，单调增区间为$(-\frac{\sqrt{-2a}}{2},+\infty)$. -----7 分

（II）解法一：

$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x$

又$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$的切线与直线 y=-x 垂直

$\therefore f'(1)=a+2=1$　　即$a=-1$　　-------8 分

若函数 $y=f(x)$ 的图象总在 $g(x)=bx$ 图象的上方，即 $\forall x(0,+\infty), f(x)>bx$ 恒成立。

$\therefore \forall x\in(0,+\infty)$，$x^2-\ln x>bx$ 恒成立

即$\forall x\in(0,+\infty), b<\frac{x^2-\ln x}{x}$ 恒成立　　-------10 分

令 $k(x)=\frac{x^2-\ln x}{x}$，则 $b<k(x)_{\min}$

$\because k'(x)=\frac{(2x-\frac{1}{x})x-(x^2-\ln x)}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

令 $\varphi(x)=x^2-1+\ln x$　　$x\in(0,+\infty)$

则 $\varphi'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$ 恒成立

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.　　---13 分

又$\because \varphi(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $k'(x)<0$　所以函数 $k(x)$ 在（0，1）上单调递减

当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $k'(x)>0$，所以函数 $k(x)$ 在$(1,+\infty)$上单调递增　　------14 分

所以 $k(x)_{\min}=k(1)=1$

故 $b<1$，即实数 $b\in(-\infty,1)$.　　------15 分

（II）解法二：

$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x$

又$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$的切线与直线 y=-x 垂直

$\therefore f'(1)=a+2=1$　　即$a=-1$　　------8 分

$y=bx$ 是一条过原点的直线

假设直线 $y=bx$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，设切点坐标(x_0,y_0)

则$\begin{cases} x_0^2-\ln x_0=bx_0 \\ 2x_0-\frac{1}{x_0}=b \end{cases}$　所以 $x_0^2+\ln x_0-1=0$　　------9 分

令 $k(x)=x^2+\ln x-1$　　则 $k'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$ 恒成立

$\therefore k(x)=x^2+\ln x-1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增

$\because k(1)=0$

所以 $x_0^2+\ln x_0-1=0$ 有且仅有一解 $x_0=1$，即切点坐标（1，1）

当直线 $y=bx$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切时，切点（1，1）　　-------13 分

此时直线 $y=bx$ 的斜率为 1，即 $b=1$

所以当函数 $y=f(x)$ 的图象总在 $g(x)=bx$ 图象的上方时

$b<1$,即 $\mathrm{b}\in(-\infty,1)$　　-------15 分

21（本小题 15 分）已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$1\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge 2$）,若对任意的 i,j（$1\le i\le j\le n$），a_ia_j 与 $\dfrac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A，则称数集 A 具有性质 P.

（I）分别判断数集 B=$\{1,2,4\}$ 与数集 C=$\{1,3,5,7\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（II）若数集 A 具有性质 P.

（i）当 $n=3$ 时，证明 $a_1=1$，且 a_1,a_2,a_3 成等比数列；

（ii）证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_n(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\dfrac{1}{a_n})$.

【解析】

（I）数集 $\{1,2,4\}$ 具有性质 P，$\{1,3,5,7\}$ 不具有性质 P，理由如下：

因为 1×1，1×2，1×4，2×2，$\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{4}{4}$ 都属于数集 $\{1,2,4\}$，所以 $\{1,2,4\}$ 具有性质 P；

因为 3×5，$\dfrac{5}{3}$ 都不属于数集 $\{1,3,5,7\}$，所以 $\{1,3,5,7\}$ 不具有性质 P.　　------3 分

（II）当 $n=3$ 时，$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$1\le a_1<a_2<a_3$.

因为 $1<a_2<a_3$，所以 $a_2a_3>a_3$，$a_3a_3>a_3$，所以 a_2a_3 与 a_3a_3 都不属于 A，

因此 $\dfrac{a_3}{a_2}\in A$,$\dfrac{a_3}{a_3}=1\in A$,所以 $a_1=1$.　　------------5 分

因为 $1<\dfrac{a_3}{a_2}<a_3$，且 $\dfrac{a_3}{a_2}\in A$，所以 $\dfrac{a_3}{a_2}=a_2$，

又 $\dfrac{a_2}{a_1}=a_2$，所以 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=a_2$，所以 a_1,a_2,a_3 成等比数列.　　----------8 分

（III）因为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 具有性质 P，所以 a_na_n，$\dfrac{a_n}{a_n}$ 至少有一个属于 A，

因为$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，所以$a_n a_n > a_n$，$a_n a_n \notin A$，因此$\frac{a_n}{a_n} = 1 \in A$, $a_1 = 1$. ---9 分

因为$1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，所以$a_k a_n > a_n$（$k = 2,3,4,\cdots n$），故当$k \ge 2$时，$a_k a_n \notin A$

, $\frac{a_n}{a_k} \in A$,（$k = 2,3,4,\cdots n$） -------11 分

又因为$\frac{a_n}{a_1} > \frac{a_n}{a_2} > \frac{a_n}{a_3} > \cdots > \frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{a_n}{a_n}$

所以$a_n = \frac{a_n}{a_1}$，$a_{n-1} = \frac{a_n}{a_2}$，$\cdots$，$a_2 = \frac{a_n}{a_{n-1}}$，$a_1 = \frac{a_n}{a_n}$ -------13 分

所以$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 = \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_n}{a_n}$,

所以$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n})$ --------15 分