北京市西城区 2023—2024 学年度第二学期期末试卷

高二数学答案及评分参考

2024.7

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. C	2. B	3. D	4. A	5. A
6. C	7. B	8. D	9. A	10. D

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分.

11．$[-2,0)\cup(0,+\infty)$　　12．$\dfrac{2}{3}$　　13．$\dfrac{1}{3}$；1（答案不唯一，$E(\xi)\in(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3})$ 即可）

14．-5；605　　15．② ③ ④

注：第 13，14 题第一问 3 分，第二问 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，有两个选对且无错选得 3 分，有一个选对且无错选得 2 分，其他得 0 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.　　…………… 1 分

且 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，　　…………… 3 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=1$.　　…………… 4 分

随着 x 的变化，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

…………… 6 分

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1)$，单调减区间为 $(1,+\infty)$.　　…………… 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$f(0)=m$，$f(1)=\dfrac{1}{e}+m$，$f(3)=\dfrac{3}{e^3}+m$.　　…………… 9 分

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上有两个零点，

所以 $f(1)=\dfrac{1}{e}+m>0$，$f(3)=\dfrac{3}{e^3}+m\leqslant 0$，　　…………… 12 分

解得 $-\frac{1}{\mathrm{e}}<m\leqslant-\frac{3}{\mathrm{e}^3}$．即 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{\mathrm{e}},-\frac{3}{\mathrm{e}^3}]$． …………… 13 分

17.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $a_2=2, a_3=4$． …………… 2 分

因为 $S_n=a_{n+1}-1$，①

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=a_n-1$，②

由 ① ②两式相减，得 $a_n=a_{n+1}-a_n$，

即 $a_{n+1}=2a_n\ (n\geqslant 2)$， …………… 4 分

又因为 $\frac{a_2}{a_1}=2$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\ (n\in\mathbf{N}^*)$．即 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列， ………… 5 分

所以 $a_n=2^{n-1}$． …………… 7 分

（Ⅱ）由题意，得 $b_1=-S_4=-15$，$d=2$． …………… 9 分

则 $T_n=nb_1+\frac{n(n-1)}{2}\times d$ …………… 11 分

$=n^2-16n$

$=(n-8)^2-64$， …………… 12 分

所以当 $n=8$ 时，T_n 取到最小值 -64． …………… 13 分

18.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）样本中有 9 名乙单位职工，其中有 2 人的户外运动时长不足 20 小时． ……… 1 分

所以乙单位中夏天户外运动时长不足 20 小时的职工的概率约为 $\frac{2}{9}$． ………… 2 分

故乙单位约有 $1800\times\frac{2}{9}=400$ 名职工参加此次体检． …………… 3 分

（Ⅱ）从甲单位中随机选出 1 人，其夏天户外运动时长不少于 35 小时的概率为 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$；

从乙单位中随机选出 1 人，其夏天户外运动时长不少于 35 小时的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$．

…………… 5 分

由题设，X 的可能取值为$0,\ 1,\ 2,\ 3$． …………… 6 分

且 $P(X=0)=\mathrm{C}_2^0(1-\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{6}$；

$P(X=1)=\mathrm{C}_2^1(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+\mathrm{C}_2^0(1-\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$；

$P(X=2)=\mathrm{C}_2^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{3})+\mathrm{C}_2^1(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$；

$P(X=3)=\mathrm{C}_2^2(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$． …………… 10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

…………… 11 分

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{12}=\frac{4}{3}$． …………… 12 分

（Ⅲ）$s_1^2>s_2^2$． …………… 15 分

19．（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意, 得水池的底面积为x^2，侧面积为$4x\times\frac{6}{x^2}=\frac{24}{x}$（单位：$\mathrm{m}^2$）．……… 2 分

所以水池的造价 $S=600x^2+\frac{9600}{x}$, 其中 $x>0$（单位：元）． …………… 5 分

（Ⅱ）对函数 $S(x)=600x^2+\frac{9600}{x}$ 求导，得 $S'(x)=1200(x-\frac{8}{x^2})$． …………… 7 分

令 $S'(x)=0$，解得 $x=2$． …………… 9 分

由 $S'(x)>0$，解得 $x>2$；故 $S(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

由 $S'(x)<0$，解得 $x<2$；故 $S(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减.

所以当 $x=2$ 时，$S(x)$ 取得最小值 $S(2)=7200$． …………… 12 分

因此，当水池底面的边长为 2 m 时，水池的总造价最低． …………… 14 分

20．（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=x-\ln(x+2)$，得 $f'(x)=1-\frac{1}{x+2}$． …………… 2 分

则 $f(-1)=-1$，$f'(-1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=-1$. …………… 4 分

（Ⅱ）函数的定义域为 $(-a,+\infty)$， …………… 5 分

且 $f'(x)=\dfrac{x+a-1}{x+a}$. …………… 6 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=1-a>-a$. …………… 7 分

随着 x 的变化，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-a,1-a)$	$1-a$	$(1-a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

…………… 8 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1-a,+\infty)$，单调递减区间为 $(-a,1-a)$.

故当 $x=1-a$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(1-a)=1-a=0$，即 $a=1$. …………… 9 分

（Ⅲ）设 $g(x)=kx^2-f(x)=kx^2-x+\ln(x+1)$，$x\in[0,+\infty)$.

则 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，即 $g(x)_{\min}\geqslant 0$. …………… 10 分

由 $g(1)=k-1+\ln 2\geqslant 0$，得 $k\geqslant 1-\ln 2>0$. …………… 11 分

求导，得 $g'(x)=2kx-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x(2kx+2k-1)}{x+1}$. …………… 12 分

① 当 $x_1=\dfrac{1-2k}{2k}>0$，即 $k<\dfrac{1}{2}$ 时，

随着 x 的变化，$g(x)$，$g'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减，

所以 $g(x_1)<g(0)=0$，与题意不符. …………… 13 分

② 当 $x_1=\dfrac{1-2k}{2k}\leqslant 0$，即 $k\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

由 $x\in[0,+\infty)$ 得 $g'(x)\geqslant 0$（当 $x=0$ 时取等号），即 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(0)=0$，符合题意.

综上，k 的最小值为$\frac{1}{2}$. …………… 15 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）满足条件的答案有 4 组：分别为

$\{a_n\}$: $1,2,4,3$, $\{b_n\}$: $2,3,4,1$； $\{a_n\}$: $2,1,4,3$, $\{b_n\}$: $3,2,4,1$；

$\{a_n\}$: $2,3,1,4$, $\{b_n\}$: $3,4,1,2$； $\{a_n\}$: $3,2,1,4$, $\{b_n\}$: $4,3,1,2$. ……… 3 分

（Ⅱ）记等差数列 C 的公差为 d $(d\neq 0)$，

由 $a_i, b_i \in \{1,2,\cdots,2024\}$， $c_k = a_k - b_k$， $k=1,2,\cdots,2024$，

得 $-2023 \leqslant c_i \leqslant 2023$，则 $-4046 \leqslant c_{2024} - c_1 \leqslant 4046$. …………… 5 分

由 $c_{2024} - c_1 = 2023d$，得 $d \in \{-2,-1,1,2\}$. …………… 6 分

因为 $a_i, b_i \in \{1,2,\cdots,2024\}$，且 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为各项互不相等的 2024 项数列，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2024} c_i = \sum\limits_{i=1}^{2024} a_i - \sum\limits_{i=1}^{2024} b_i = 0$， …………… 7 分

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2024} c_i = \dfrac{2024(c_1 + c_{2024})}{2} = 0$，即 $c_1 + c_{2024} = c_{1012} + c_{1013} = 0$.

所以公差 $d = c_{1013} - c_{1012} = \pm 2$. …………… 8 分

不妨设公差 $d = 2$，则 C: $-2023, -2021, \cdots, 2021, 2023$.

而 ± 2023 只能由 1 和 2024 得到，去除两端的数后 ± 2021 只能由 2 和 2023 得到……

以此类推，于是 $a_i + b_i$ 总为定值 2025. …………… 10 分

（Ⅲ）由题意，数列 C 中有 N 个不同的整数，

所以 $P-Q$ 的值大于或等于 $N-1$，当且仅当数列 C 为 N 个连续整数时取得等号.

当 N 为偶数时，若存在数列 C，使得 $P-Q=N-1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i = \dfrac{N(c_1 + c_1 + N - 1)}{2}$.

由 N 为偶数，知 $c_1 + c_1 + N - 1$ 为奇数，则 $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i$ 不可能为 0.

这与 $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i - \sum\limits_{i=1}^{N} b_i = 0$ 矛盾，

所以当 N 为偶数时，$P-Q\geqslant N$.　　　　　　　　　　　　　　　　…………… 12 分

且当 N 为偶数时，如果数列 $\{a_n\}$: $1, 2, 3, \cdots, \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}+2, \cdots, N-1, N$ ；

数列 $\{b_n\}$：$2, 4, 6, \cdots, N-2, N, 1, 3, \cdots, N-3, N-1$；

那么数列 C: $-1, -2, -3, \cdots, -\frac{N}{2}+1, -\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \cdots, 2, 1$ ；

此时满足 $P-Q=N$.　　　　　　　　　　　　　　　　…………… 13 分

当 N 为奇数时，

如果数列 $\{a_n\}$: $1, 2, 3, \cdots, \frac{N-1}{2}-1, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}+1, \frac{N-1}{2}+2, \cdots, N-2, N-1, N$ ；

数列 $\{b_n\}$：$2, 4, 6, \cdots, N-3, N-1, 1, 3, \cdots, N-4, N-2, N$；

那么数列 C: $-1, -2, \cdots, -\frac{N-1}{2}+1, -\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}-1, \cdots, 2, 1, 0$；

此时 $P-Q=N-1$.

综上，当 N 为偶数时，$P-Q$ 最小值为 N；当 N 为奇数时，$P-Q$ 最小值为 $N-1$.

…………… 15 分