北京市西城区2023—2024学年度第二学期期末试卷

高二数学

2024.7

本试卷共5页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_3=5$，则$a_{10}=$

（A）8　　（B）10

（C）12　　（D）14

（2）设函数$f(x)=\sin x$的导函数为$g(x)$，则$g(x)$为

（A）奇函数　　（B）偶函数

（C）既是奇函数又是偶函数　　（D）非奇非偶函数

（3）袋中有5个形状相同的乒乓球，其中3个黄色2个白色，现从袋中随机取出3个球，则恰好有2个黄色乒乓球的概率是

（A）$\frac{1}{10}$　　（B）$\frac{3}{10}$　　（C）$\frac{1}{5}$　　（D）$\frac{3}{5}$

（4）在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，$a_4=4$，则$a_2a_3=$

（A）4　　（B）6

（C）2　　（D）± 6

（5）投掷2枚均匀的骰子，记其中所得点数为1的骰子的个数为X，则方差$D(X)=$

（A）$\frac{5}{18}$　　（B）$\frac{1}{3}$

（C）$\frac{5}{3}$　　（D）$\frac{5}{36}$

（6） 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=-1$，$32S_{10}=31S_5$，则$a_6=$

（A）$-\dfrac{1}{32}$　　（B）$-\dfrac{1}{64}$

（C）$\dfrac{1}{32}$　　（D）$\dfrac{1}{64}$

（7） 设函数$f(x)=\ln x$的导函数为$f'(x)$，则

（A）$f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$　　（B）$f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

（C）$f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$　　（D）$f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$

（8）设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则“$\{a_n\}$是递增数列”是“$\{S_n\}$是递增数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9） 如果$f(x)=ax-e^x$在区间$(-1,0)$上是单调函数，那么实数a的取值范围为

（A）$(-\infty,\dfrac{1}{e}]\cup[1,+\infty)$　　（B）$[\dfrac{1}{e},1]$

（C）$(-\infty,\dfrac{1}{e}]$　　（D）$[1,+\infty)$

（10）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，若存在常数$c\,(c\neq 0)$，使得对于任意的正整数m,n等式

$a_{m+n}=a_m+ca_n$成立，则

（A）符合条件的数列$\{a_n\}$有无数个

（B）存在符合条件的递减数列$\{a_n\}$

（C）存在符合条件的等比数列$\{a_n\}$

（D）存在正整数N，当$n>N$时，$a_n>2024$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为___.

（12）在奥运知识有奖问答竞赛中，甲、乙两人同时回答一道有关奥运知识的问题，已知甲答对这道题的概率是 $\dfrac{3}{4}$，甲、乙两人都回答错误的概率是 $\dfrac{1}{12}$. 假设甲、乙两人回答问题正确与否相互独立. 那么乙答对这道题的概率为___.

（13）设随机变量 ξ 的分布列如下，其中 a_1,a_2,a_3 成等差数列，且 $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$.

ξ	0	1	2
P	a_1	a_2	a_3

则 $a_2=$___；符合条件的 $E(\xi)$ 的一个值为___.

（14）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=7$，$a_4=8$，且 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=10$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

则 $a_3=$___；使得 $S_n\geqslant 2024$ 成立的 n 的最小值为___.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & x>0,\\ -x^2+2ax-2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$. 给出下列四个结论：

① 当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值，无极小值；

② 若方程 $f(x)=a$ 存在三个根，则 $a\in[-2,-1)$；

③ 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象上存在关于原点对称的两个点；

④ 当 $a=\dfrac{-2\sqrt{3}-1}{2}$ 时，存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 使得函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线是同一条直线.

其中所有正确结论的序号是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

函数 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+m$，其中 $m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $m=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上有两个零点，求 m 的取值范围.

（17）（本小题 13 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1=1$，且对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $S_n=a_{n+1}-1$ 成立.

（Ⅰ）写出 a_2,a_3 的值，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若等差数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=-S_4$，公差 $d=\dfrac{a_2}{a_1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的最小值.

（18）（本小题 15 分）

为了解不同人群夏天户外运动的情况，分别从甲、乙两个单位随机选出几名职工，统计了他们的夏天户外运动时长，得到以下数据（单位：小时）：

甲单位：25，26，32，33，34，36，46，47，50，55；

乙单位：15，16，22，23，24，26，36，37，40.

假设用频率估计概率，用样本估计总体，且每名职工的户外运动情况相互独立.

（Ⅰ）现要对乙单位中夏天户外运动时长不足 20 小时的职工进行体检，已知乙单位共有 1800 名职工，试估计乙单位此次参加体检的职工人数.

（Ⅱ）从甲单位职工中随机抽取 2 人、乙单位职工中随机抽取 1 人，记 X 为这 3 人中夏天户外运动时长不少于 35 小时的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）设样本中甲单位职工户外运动时长的方差为 s_1^2、乙单位职工户外运动时长的方差为 s_2^2，写出 s_1^2 与 s_2^2 的大小关系.（结论不要求证明）

（19）（本小题 14 分）

为冷却生产出来的工件，某工厂需要建造一个无盖的长方体水池，要求该水池的底面是正方形，且水池最大储水量为 6 m^3．已知水池底面的造价为 600 元/ m^2，侧面的造价为 400 元/ m^2．

（Ⅰ）把水池的造价 S（单位：元）表示为水池底面边长 x（单位：m）的函数；

（Ⅱ）为使水池的总造价最低，应如何确定水池底面的边长？

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的极小值为 0，求 a 的值；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)\leqslant kx^2$ 成立，求实数 k 的最小值.

（21）（本小题 15 分）

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为各项互不相等的 N 项数列，其中 $a_i,b_i\in\{1,2,\cdots,N\}$，$i=1,2,\cdots,N$．记数列 C：$c_1,c_2,\cdots,c_N$，其中 $c_k=a_k-b_k$，$k=1,2,\cdots,N$．

（Ⅰ）写出所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使得数列 C：$-1,-1,0,2$；

（Ⅱ）若 $N=2024$，C 是公差不为 0 的等差数列，求证：a_i+b_i 为定值；

（Ⅲ）若 C 为各项互不相等的数列，记 C 中最大的数为 P，最小的数为 Q，求 $P-Q$ 的最小值.