海淀区 2023—2024 学年第一学期期末练习

高三数学

2024.01

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

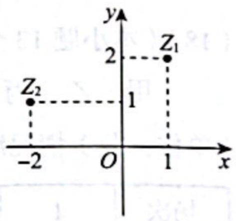
一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $\complement_U(A\cap B)=$

（A）$\{2,4,5,6\}$　　（B）$\{4,6\}$

（C）$\{2,4,6\}$　　（D）$\{2,5,6\}$

（2）如图，在复平面内，复数 z_1，z_2 对应的点分别为 Z_1，Z_2，则复数 $z_1\cdot z_2$ 的虚部为



（A）$-\mathrm{i}$　　（B）-1

（C）$-3\mathrm{i}$　　（D）-3

（3）已知直线 l_1：$x+\dfrac{y}{2}=1$，直线 l_2：$2x-ay+2=0$，且 $l_1/\!/l_2$，则 $a=$

（A）1　　（B）-1

（C）4　　（D）-4

（4）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF|=4$，O 为坐标原点，则 $|MO|=$

（A）$4\sqrt{2}$　　（B）4

（C）5　　（D）$2\sqrt{5}$

（5）在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=2$，二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$，则该四棱锥的体积为

（A）4　　（B）2

（C）$\dfrac{4}{3}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

（6）已知⊙C：$x^2+2x+y^2-1=0$，直线 $mx+n(y-1)=0$ 与⊙C 交于 A，B 两点．若△ABC 为直角三角形，则

（A）$mn=0$　　（B）$m-n=0$

（C）$m+n=0$　　（D）$m^2-3n^2=0$

(7) 若关于 x 的方程 $\log_a x - a^x = 0$（$a>0$ 且 $a \neq 1$）有实数解，则 a 的值可以为

(A) 10　　　　(B) e

(C) 2　　　　(D) $\frac{5}{4}$

(8) 已知直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，倾斜角分别为 α_1，α_2，则“$\cos(\alpha_1-\alpha_2)>0$”是“$k_1k_2>0$”的

(A) 充分而不必要条件　　　　(B) 必要而不充分条件

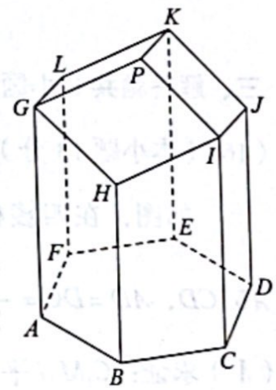
(C) 充分必要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q（$q \neq 1$）的等比数列，S_n 为其前 n 项和．若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，$S_n < \frac{a_1}{1-q}$ 恒成立，则

(A) $\{a_n\}$ 是递增数列　　　　(B) $\{a_n\}$ 是递减数列

(C) $\{S_n\}$ 是递增数列　　　　(D) $\{S_n\}$ 是递减数列

(10) 蜜蜂被誉为“天才的建筑师”．蜂巢结构是一种在一定条件下建筑用材面积最小的结构．右图是一个蜂房的立体模型，底面 $ABCDEF$ 是正六边形，棱 AG，BH，CI，DJ，EK，FL 均垂直于底面 $ABCDEF$，上顶由三个全等的菱形 $PGHI$，$PIJK$，$PKLG$ 构成．设 $BC=1$，$\angle GPI = \angle IPK = \angle KPG = \theta \approx 109°28'$，则上顶的面积为



（参考数据：$\cos\theta = -\frac{1}{3}$，$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$）

(A) $2\sqrt{2}$　　　　(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$　　　　(D) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

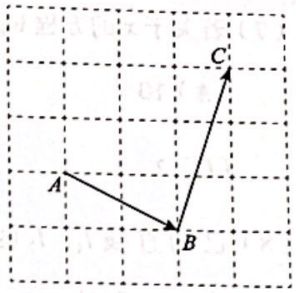
第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 在 $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为________．

(12) 已知双曲线 $x^2 - my^2 = 1$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x - y = 0$，则该双曲线的离心率为________．

（13）已知点 A，B，C 在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为 1，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________；点 C 到直线 AB 的距离为________．



（14）已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，公差为 d，则能使得 a_na_{n+1} 为某一个等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和（$n=1,2,\cdots$）的一组 a_1，d 的值为 $a_1=$________，$d=$________．

（15）已知函数 $f(x)=|\cos x+a|$．给出下列四个结论：

①任意 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 的最大值与最小值的差为 2；

②存在 $a\in\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(\pi-x)=2a$；

③当 $a\neq0$ 时，对任意非零实数 x，$f(x+\frac{\pi}{2})\neq f(\frac{\pi}{2}-x)$；

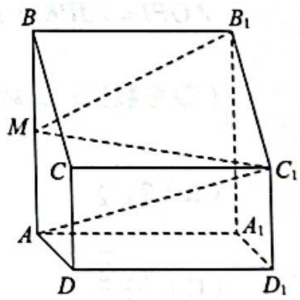
④当 $a=0$ 时，存在 $T\in(0,\pi)$，$x_0\in\mathbf{R}$，使得对任意 $n\in\mathbf{Z}$，都有 $f(x_0)=f(x_0+nT)$．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 是正方形，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AD=DC=\frac{1}{2}AB$，M 为线段 AB 的中点，$AD\perp B_1M$．



（Ⅰ）求证：$C_1M//$ 平面 ADD_1A_1；

（Ⅱ）求直线 AC_1 与平面 MB_1C_1 所成角的正弦值．

(17)(本小题14分)

在$\triangle ABC$中，$2c\cos A=2b-a$.

(Ⅰ)求$\angle C$的大小;

(Ⅱ)若$c=\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在，求AC边上中线的长.

条件①：$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$;

条件②：$\sin B-\sin A=\frac{1}{2}$;

条件③：$b^2-2a^2=2$.

注：如果选择的条件不符合要求，得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(18)(本小题13分)

甲、乙、丙三人进行投篮比赛，共比赛10场，规定每场比赛分数最高者获胜，三人得分(单位：分)情况统计如下：

场次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	8	10	10	7	12	8	8	10	10	13
乙	9	13	8	12	14	11	7	9	12	10
丙	12	11	9	11	11	9	9	8	9	11

(Ⅰ)从上述10场比赛中随机选择一场，求甲获胜的概率;

(Ⅱ)在上述10场比赛中，从甲得分不低于10分的场次中随机选择两场，设X表示乙得分大于丙得分的场数，求X的分布列和数学期望$E(X)$;

(Ⅲ)假设每场比赛获胜者唯一，且各场相互独立，用上述10场比赛中每人获胜的频率估计其获胜的概率. 甲、乙、丙三人接下来又将进行6场投篮比赛，设Y_1为甲获胜的场数，Y_2为乙获胜的场数，Y_3为丙获胜的场数，写出方差$D(Y_1)$，$D(Y_2)$，$D(Y_3)$的大小关系.

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $A(3,0)$，焦距为 $2\sqrt{5}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程，并求其短轴长；

(Ⅱ)过点 $P(1,0)$ 且不与 x 轴重合的直线 l 交椭圆 E 于两点 C，D，连接 CO 并延长交椭圆 E 于点 M，直线 AM 与 l 交于点 N，Q 为 OD 的中点，其中 O 为原点. 设直线 NQ 的斜率为 k，求 k 的最大值.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=ax^2-x\sin x+b$.

(Ⅰ)当 $a=1$ 时，求证：

①当 $x>0$ 时，$f(x)>b$；

②函数 $f(x)$ 有唯一极值点；

(Ⅱ)若曲线 C_1 与曲线 C_2 在某公共点处的切线重合，则称该切线为 C_1 和 C_2 的“优切线”. 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-\cos x$ 存在两条互相垂直的“优切线”，求 a，b 的值.

（21）（本小题 15 分）

对于给定的奇数 m（$m \geqslant 3$），设 A 是由 $m \times m$ 个实数组成的 m 行 m 列的数表，且 A 中所有数不全相同，A 中第 i 行第 j 列的数 $a_{ij} \in \{-1, 1\}$，记 $r(i)$ 为 A 的第 i 行各数之和，$c(j)$ 为 A 的第 j 列各数之和，其中 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 记 $f(A) = \dfrac{m^2 - |r(1) + r(2) + \cdots + r(m)|}{2}$. 设集合 $H = \{(i,j) \mid a_{ij} \cdot r(i) < 0$ 或 $a_{ij} \cdot c(j) < 0, i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}\}$，记 $H(A)$ 为集合 H 所含元素的个数 .

（Ⅰ）对以下两个数表 A_1，A_2，写出 $f(A_1)$，$H(A_1)$，$f(A_2)$，$H(A_2)$ 的值；

1	1	1	1	1
1	1	1	1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1

A_1

−1	−1	1	1	1
−1	1	1	1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1

A_2

（Ⅱ）若 $r(1)$，$r(2)$，…，$r(m)$ 中恰有 s 个正数，$c(1)$，$c(2)$，…，$c(m)$ 中恰有 t 个正数 .

求证：$H(A) \geqslant mt + ms - 2ts$；

（Ⅲ）当 $m = 5$ 时，求 $\dfrac{H(A)}{f(A)}$ 的最小值 .