

西城区 2023-2024 学年度第一学期期末试卷

九年级数学

2024.1

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 若抛物线 $y = x^2 + 3x + c$ 经过点 $(0, 2)$ ，则 c 的值为（ ）

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -2

2. 北京城区的胡同中很多精美的砖雕美化了生活环境，砖雕形状的设计采用了丰富多彩的图案。下列砖雕图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



3. 不透明的袋子中装有 2 个白球和 3 个黑球，除颜色外，这 5 个小球无其他差别。随机从袋子中摸出 3 个球，下列事件中是必然事件的是（ ）

- A. 3 个球都是白球 B. 至少有 1 个黑球
C. 3 个球都是黑球 D. 有 1 个白球 2 个黑球

4. 下列关于函数 $y = x^2 - 1$ 的结论中，正确的是（ ）

- A. y 随 x 的增大而减小 B. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大
C. 当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大 D. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小

5. 小云从正面观察三星堆青铜太阳轮（如图所示），发现它的正面图形可近似地看作是将圆五等分得到的图中角 α 的度数为（ ）

- A. 60°
B. 70°
C. 72°
D. 75°

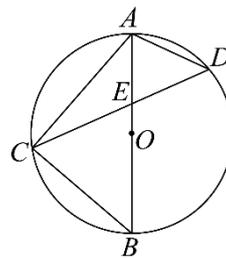


6. 某城区采取多项综合措施降低降尘量提升空气质量，降尘量由 2020 年的 5.2 吨/平方公里下降至 2022 年的 3.6 吨/平方公里月，若设降尘量的年平均下降率为 x ，则可列出关于 x 的方程为（ ）

- A. $3.6(1+2x) = 5.2$ B. $5.2(1-2x) = 3.6$
C. $3.6(1+x)^2 = 5.2$ D. $5.2(1-x)^2 = 3.6$

7. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 交 AB 于点 E , $BE = BC$. 若 $\angle CAB = 40^\circ$, 则 $\angle BAD$ 的大小为 ()

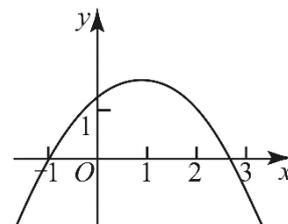
- A. 45°
 B. 50°
 C. 55°
 D. 65°



8. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$. 下面有四个结论:

① $a > 0$; ② $2a + b < 0$; ③ $4a + 2b + c > 0$; ④ 关于 x 的不等式 $ax^2 + (b - c)x > 0$ 的解集为 $-1 < x < 0$. 其中所有正确结论的序号是 ()

- A. ①② B. ②③
 C. ③④ D. ②③④



第二部分 非选择题

二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 在平面直角坐标系中, 点 $(2, -3)$ 关于原点的对称点坐标为 _____.

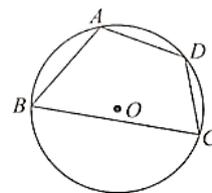
10. 一元二次方程 $x^2 - 25 = 0$ 的解为 _____.

11. 已知 $\odot O$ 的半径为 6cm , 点 P 在 $\odot O$ 外, 则 OP _____ 6cm (填 “ $>$ ”、“ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

12. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 则 k 的值为 _____.

13. 写出一个开口向上, 并且经过原点的抛物线的解析式, $y =$ _____.

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\angle A = 110^\circ$, 则 $\angle C =$ _____ $^\circ$, 依据是 _____.



15. 中国邮政集团公司曾发行《二十四节气》特殊版式小全张 (图 1), 其中的 24 枚邮票大小相同, 上面绘制了代表二十四节气风貌的图案, 这 24 枚邮票组成了一个圆环, 传达了四季周而复始、气韵流动的理念和中国传统文化中圆满、圆融的概念, 以 “大雪” 节气单枚邮票为例 (图 2), 该邮票的 “上圆弧” 的长为 l , “直边长” 为 d , “下圆弧” 的长为 x , 则 $x =$ _____ (用含 l, d 的式子表示).

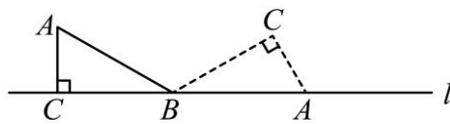


图1



图2

16. 如图，在三角尺 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 1$ 。把 CB 边放在直尺 l 上，让三角尺在桌面上沿直尺 l 按顺时针方向无滑动地滚动，直到 CB 边再一次落到直尺 l 上时停止滚动。三角尺的第一次滚动可看成将三角尺绕点 B 顺时针旋转了 150° ，记为 $(B, 150^\circ)$ 。



有以下三个结论：

- ①第一次滚动的过程中，点 C 运动的路径长为 2π ；
- ②第二次滚动可记为 $(A, 120^\circ)$ ；
- ③点 A ，点 B ，点 C 在滚动全程中，运动路径最长的是点 B 。

上述结论中，所有正确结论的序号是_____。

三、解答题（共 68 分，第 17-18 题，每题 5 分，第 19 题 6 分，第 20-23 题，每题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）

17. 解方程： $x^2 - 6x + 3 = 0$ 。

18. 已知二次函数 $y = 2x^2 - 4x + 5$ 。

(1) 将 $y = 2x^2 - 4x + 5$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式；

(2) 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + 5$ 可以由抛物线 $y = 2x^2$ 经过平移得到，请写出一种平移方式。

19. 两个质地均匀的正方体 M 和 N ，正方体 M 的六个面分别标有数字“0”，“1”，“2”，“3”，“4”，“5”；正方体 N 的六个面分别标有数字“0”，“1”，“2”，“6”，“7”，“8”。掷小正方体后，观察朝上一面的数字。

(1) 掷一次正方体 M 时，出现奇数的概率是多少；

(2) 如果先掷一次正方体 M ，再掷一次正方体 N 得到两个数字，如先后挪到“0”和“1”记为 01，可表示某月的 01 日；先后挪到“5”和“8”记为 58，不能表示某月的日期。求先后各掷一次正方体 M 和正方体 N ，得到的两个数字能组成一月的一日的一个日期的概率。

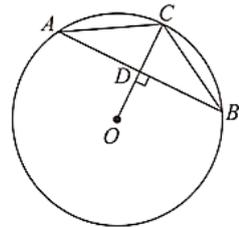
20. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 与 x 轴的一个交点为 $A(-1, 0)$ 。

- (1) $c = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 画出函数 $y = x^2 - 2x + c$ 的图像;
- (3) 当 $-2 < x \leq 2$ 时, 结合函数图像直接写出 y 的取值范围.

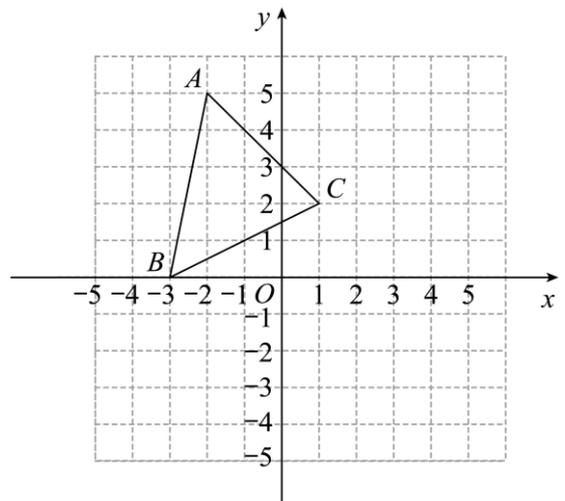
21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+2)x + m+1 = 0$.

- (1) 求证: 无论 m 取何值, 方程总有两个实数根;
- (2) 若方程的一个实数根是另一个实数根的两倍, 求 m 的值.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, 半径 $OC \perp AB$, 垂足为 D . $\angle ACB = 120^\circ$, $AB = 6$, 求 $\odot O$ 的半径.

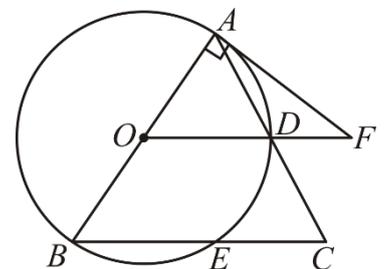


23. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-2,5)$, $B(-3,0)$, $C(1,2)$. 将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$, 点 A , B , C 的对应点分别为 A' , B' , C' .



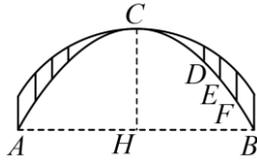
- (1) 画出旋转后的 $\triangle A'B'C'$;
- (2) 直接写出点 C' 的坐标;
- (3) 记线段 $B'C'$ 与线段 BC 的交点为 G , 直接写出 $\angle BGC'$ 的大小.

24. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AB = BC$, AC 交 $\odot O$ 于点 D , 点 F 在 OD 的延长线上且 $\angle FAD = \frac{1}{2} \angle ABC$.



- (1) 求证: AF 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $AF = 8$, $DF = 4$, 求 AC 的长.

25. 如图, 小云在生活中观察到一个拱门, 拱门的上方拱线 M 和下方拱线 N 的最高点均为点 C , 拱门的跨径间对称分布有 8 根立柱. 他搜集到两条拱线的相关数据, 拱线 N 的跨径 AB 长为 14m , 高 HC 为 6.125m . HC 右侧的四根立柱在拱线 N 上的端点 D , E , F , B 的相关数据如下表所示.



	点D	点E	点F	点B
距HC的水平距离(m)	4	5	6	7
距AB的竖直距离(m)	4.125	3.000	1.625	0

所查阅的资料显示：拱线M为某个圆的一部分，拱线N为某条抛物线的一部分。

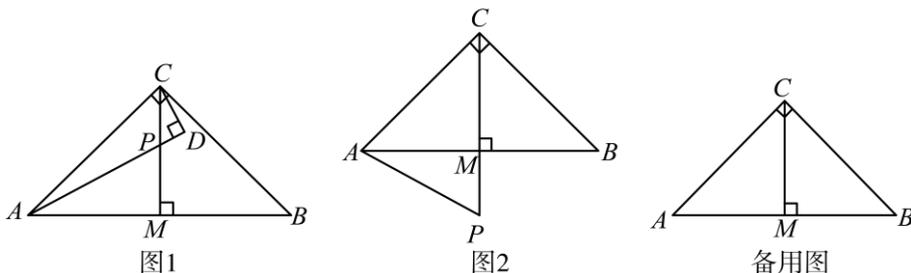
根据以上信息，解答下列问题：

- 选取拱线M上的任意三点，通过尺规作图作出拱线M所在的圆；
- 建立适当的平面直角坐标系，选取拱线N上的点，求出拱线N所在的抛物线对应的函数解析式，并验证拱线N上的其他已知点都在抛物线上，写出验证过程（不添加新的字母）。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中， $A(t, y_1)$ ， $B(t+1, y_2)$ ， $C(t+3, y_3)$ 三点都在抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 4$ ($a > 0$) 上。

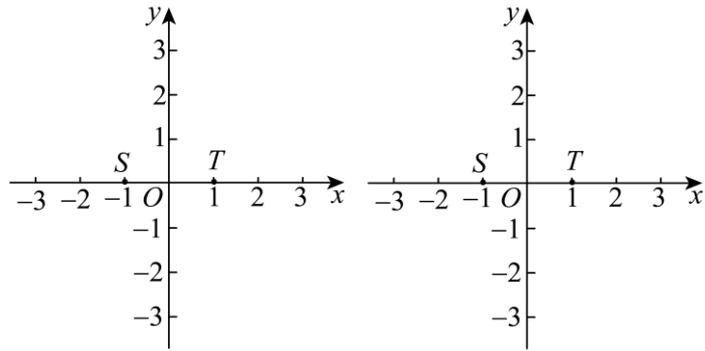
- 这个抛物线的对称轴为直线_____。
- 若 $y_1 > y_3 \geq y_2$ ，求 t 的取值范围；
- 若无论 t 取任何实数，点A，B，C中都至少有两个点在 x 轴的上方，直接写出 a 的取值范围。

27. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $CM \perp AB$ 于点M。点P在射线CM上，连接AP，作 $CD \perp AP$ 于点D。连接MD，作 $CE \perp MD$ 于点E，作 $DF \parallel AB$ 交直线CE于点F，连接MF。



- 当点P在线段CM上时，在图1中补全图形，并直接写出 $\angle ADM$ 的度数；
- 当点P在线段CM的延长线上时，利用图2探究线段DF与AM之间的数量关系，并证明；
- 取线段MF的中点K，连接BK，若 $AC = 8$ ，直接写出线段BK的长的最小值。

28. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $S(-1, 0)$ ， $T(1, 0)$ 。对于一个角 α ($0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$)，将一个图形先绕点S顺时针旋转 α ，再绕点T逆时针旋转 α ，称为一次“ α 对称旋转”。



备用图

- (1) 点 R 在线段 ST 上, 则在点 $A(1, -1)$, $B(3, -2)$, $C(2, -2)$, $D(0, -2)$ 中, 有可能是由点 R 经过一次 “ 90° 对称旋转” 后得到的点是_____;
- (2) x 轴上的一点 P 经过一次 “ α 对称旋转” 得到点 Q .
- 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $PQ =$ _____;
- 当 $\alpha = 30^\circ$ 时, 若 $QT \perp x$ 轴, 求点 P 的坐标;
- (3) 以点 O 为圆心作半径为 1 的圆. 若在 $\odot O$ 上存在点 M , 使得点 M 经过一次 “ α 对称旋转” 后得到的点在 x 轴上, 直接写出 α 的取值范围.