海淀区 2024—2025 学年第一学期期中练习

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C	（2）A	（3）D	（4）B	（5）B
（6）B	（7）B	（8）C	（9）A	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）1　　（12）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（13）$\frac{2}{3},\frac{1}{3}$　　（14）$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}),2$

（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：

（Ⅰ）当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times 3^{n-1}$，

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_1=2$.

又因为 $a_1=S_1=3+b$，所以 $b=-1$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $a_n=2\times 3^{n-1}$，

因为 $a_2=6$，且 $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=9$，{ 或者 $a_{2n}=6\times 9^{n-1}$ }

所以 $\{a_{2n}\}$ 是以 6 为首项，9 为公比的等比数列；

$$T_n=(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+[1+3+\cdots+(2n-1)]$$

$$=6\times\frac{9^n-1}{9-1}+\frac{2n\cdot n}{2}$$

$$=\frac{3}{4}(9^n-1)+n^2.$$

（17）（本小题 14 分）

解：

（Ⅰ）条件①

$f(x)=A\sin 2x+\cos 2x$，

所以 $f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{7\pi}{12})=A\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+A\sin\frac{7\pi}{6}+\cos\frac{7\pi}{6}=0$，

所以 $A-\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

解得 $A=\sqrt{3}$.

条件②：

$f(x)=A\sin 2x+\cos 2x$,

所以 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 后所得图象关于原点对称.

所以 $f(-\frac{\pi}{12})=0$，

即 $A\sin(-\frac{\pi}{6})+\cos(-\frac{\pi}{6})=-\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

计算得 $A=\sqrt{3}$.

经验证：$A=\sqrt{3}$.

条件③：$f(x)=A\sin 2x+\cos 2x$,

所以 $f\left(x\right)=\sqrt{A^2+1}\sin\left(2x+\varphi\right)$　其中 $\tan\varphi=\frac{1}{A},\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$.

由题意可知 $|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|=4$，即 $\sqrt{A^2+1}=2$，

因为 $A>0$，

所以 $A=\sqrt{3}$.

（Ⅱ）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$ 时 $f(x)$ 取得极大值,

即 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathrm{Z}$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上有且仅有两个极大值点,

所以 $k=0,1$ 符合题意,

所以$m\in(\frac{7\pi}{6},\frac{13\pi}{6}]$.

（18）（本小题 14 分）

解：

（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{(x^2-a)'\cdot e^x-(x^2-a)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{2x\cdot e^x-(x^2-a)\cdot e^x}{e^x}$

$$=\frac{-x^2+2x+a}{e^x}$$

依题意$\begin{cases}f(0)=-3,\\ f'(0)=k,\end{cases}$ 解得$a=k=3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$.

法一：$f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x-3)}{e^x}$，

令 $f'(x)=0$，解得$x=-1$或3， $f'(x),f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

由表格可知， $f(x)$有极小值$f(-1)=-2e$，

因为当$x\in(3,+\infty)$时， $f(x)>0$，

所以$f(x)$最小值为$-2e$.

法二：$f(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$，因为$e^x>0$，

要求$f(x)$最小值，只需考虑$x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}=\frac{-(x+1)(x-3)}{e^x}$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 3， $f(x), f'(x)$ 随 x 变化如下表：

x	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-\sqrt{3},-1)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

由表格可知， $f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-2e$ ，

此时，极小值即为最小值，所以 $f(x)$ 有最小值 $-2e$.

（19）（本小题 14 分）

解：

（Ⅰ）因为 $\cos\angle BAC=\frac{5\sqrt{7}}{14}>0$，

所以 $\angle BAC$ 为锐角，

所以 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\frac{\sqrt{21}}{14}$，

在△ ABC 中， $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以 $AC=\frac{BC\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=\sqrt{7}$ ，

因为 $\sqrt{7}<3$，

所以 A 处工作人员用对讲机能与 C 处工作人员正常通话.

（II）方法一：

由余弦定理， $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD=7+4-2\times\sqrt{7}\times 2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=3$，

因为 $AD^2+CD^2=3+4=7=AC^2$ ，

所以 AD 的长为点 A 与直线 PQ 上所有点的距离的最小值，

所以 D 点选址符合要求.

方法二：

假设 PQ 上的 E 点接收景点入口 A 处对讲机的信号最强，则 $AE\perp PQ$ ，

所以$CE = AC\cdot\cos\angle ACD=\sqrt{7}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=2$，

所以D点选址符合要求.

（20）（本小题15分）

解：

（Ⅰ） $f(x)$的定义域为$(a,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{a}{x-a}+x-(2a+1)=\frac{x^2-(3a+1)x+2a^2+2a}{x-a}=\frac{(x-2a)[x-(a+1)]}{x-a},$$

因为4是$f(x)$的极大值点，

所以$f'(4)=0$，即$(4-2a)(3-a)=0$，解得$a=2$或$a=3$.

当$a=2$时，当x变化时，$f'(x), f(x)$的变化情况如下表：

x	$(2,3)$	3	$(3,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时4是$f(x)$的极小值点，不符合题意.

当$a=3$时，当x变化时，$f'(x), f(x)$的变化情况如下表：

x	$(3,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时4是$f(x)$的极大值点，符合题意.

因此，$a=3$，此时$f(4)=-20$.

（Ⅱ）（1）$0<a<1$时，当x变化时，$f'(x), f(x)$的变化情况如下表：

x	$(a,2a)$	$2a$	$(2a,a+1)$	$a+1$	$(a+1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(2a)=a\ln a-2a^2-2a<0$，因此 $x\in(a,a+1]$ 时，$f(x)<0$.

又 $f(4a+2)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(a+1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点.

因此 $f(x)$ 的零点个数是1.

（2）当 $a=1$ 时，对任意 $x>1$，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

又 $f(2)<0, f(6)>0$，因此 $f(x)$ 的零点个数是1.

（3）当 $a>1$ 时，当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(a,a+1)$	$a+1$	$(a+1,2a)$	$2a$	$(2a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(a+1)=(-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2})(a+1)<0$，因此 $x\in(a,2a]$ 时，$f(x)<0$.

又 $f(4a+2)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(2a,+\infty)$ 上有且仅有一个零点.

因此 $f(x)$ 的零点个数是1.

综上，$a>0$ 时，$f(x)$ 的零点个数是1.

（21）（本小题 15 分）

解：

（Ⅰ）$a=1,b=1,c=1,d=3$.

（Ⅱ）不可以，理由如下：

由题可知每次变换 T，数表中所有数的和增加或减少 5.

因为 A 中所有数的和为 0，所以其经过有限次变换 T 后各数和为 5 的倍数.

而 B 中所有数的和为 9，不符合，故无法通过有限次变换 T ，将 A 变换为 B.

（III）可以，且 k 的最小值为 400.

当所选 $i, j \in \{1,2,\cdots,10\}$ 时，所有加 1 的变换 T 与减 1 的变换 T 次数之差设为 x；

当所选 $i=11$ 且 $j \in \{1,2,\cdots,10\}$ 或者 $i \in \{1,2,\cdots,10\}$ 且 $j=11$ 时，所有加 1 的变换 T 与减 1 的变换 T 次数之差设为 y；

当所选 $i=j=11$ 时，加 1 的变换 T 与减 1 的变换 T 次数之差设为 z .

考虑变换 T 对上述三部分各数之和的影响，可知 $\begin{cases} 19x+10y=100, \\ 2x+10y+20z=-200, \\ y+z=100, \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x=-100, \\ y=200, \\ z=-100, \end{cases}$

所以 $k \geq |x|+|y|+|z|=400$.

其中符合题意的 400 次变换 T 构造如下：

当所选 $i, j \in \{1,2,\cdots,10\}$ 时，各进行一次减 1 的变换 T ；

当所选 $i=11, j \in \{1,2,\cdots,10\}$ 或 $i \in \{1,2,\cdots,10\}, j=11$ 时，各进行 10 次加 1 的变换 T ；

当所选 $i=j=11$ 时，进行 100 次减 1 的变换 T .