海淀区 2023—2024 学年第一学期期末练习

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　（2）D　（3）B　（4）D　（5）C

（6）A　（7）D　（8）B　（9）B　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-5　（12）2

（13）-1　$\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$　（14）1　1（答案不唯一）

（15）②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

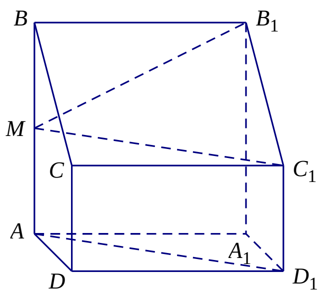
（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）连接 AD_1.

在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 CDD_1C_1 为平行四边形，

所以 $C_1D_1 // CD$， $C_1D_1 = CD$.

因为 $AB // CD$， $CD=\dfrac{1}{2}AB$， M 为 AB 中点，



所以 $CD // AM$， $CD = AM$.

所以 $C_1D_1 // AM$， $C_1D_1 = AM$.

所以四边形 MAD_1C_1 为平行四边形.

所以 $MC_1 // AD_1$.

因为 $C_1M \not\subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $C_1M //$ 平面 ADD_1A_1.

（Ⅱ）在正方形 ABB_1A_1 中， $AA_1 \perp AB$.

因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $AA_1 \perp AD$.

因为 $AD \perp B_1M$， $B_1M \subset$ 平面 ABB_1A_1， B_1M 与 AA_1 相交，

所以 $AD \perp$ 平面 ABB_1A_1.

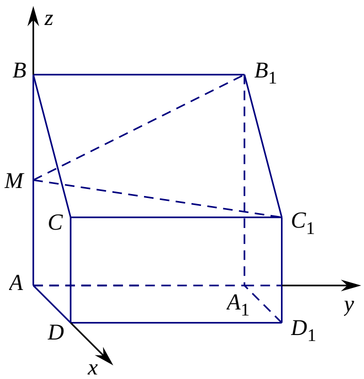
所以 $AD \perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

不妨设 $AD=1$，则

$A(0,0,0)$，$C_1(1,2,1)$，$B_1(0,2,2)$，$M(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AC_1}=(1,2,1)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{MC_1}=(1,2,0)$.



设平面 MB_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC_1}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-x+z=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$$

令 $x=2$，则 $y=-1$，$z=2$. 于是 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2)$.

因为 $\cos<\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，

所以直线 AC_1 与平面 MB_1C_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 及 $2c\cos A=2b-a$，得

$2\sin C\cos A=2\sin B-\sin A$. ①

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$. ②

由①②得 $2\sin A\cos C-\sin A=0$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq 0$.

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$.

因为 $C\in(0,\pi)$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）选条件②：$\sin B-\sin A=\frac{1}{2}$.

由（Ⅰ）知，$\angle B=\pi-\frac{\pi}{3}-\angle A=\frac{2\pi}{3}-\angle A$.

所以 $\sin B-\sin A=\sin(\frac{2\pi}{3}-A)-\sin A$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A-\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A$$

$$=\sin(\frac{\pi}{3}-A).$$

所以 $\sin(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\frac{2\pi}{3})$，所以 $\frac{\pi}{3}-A\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$.

所以 $\frac{\pi}{3}-A=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{6}$.

所以$\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的直角三角形.

因为 $c=\sqrt{3}$，

所以 $AC=\frac{AB}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$.

所以 AC 边上的中线的长为1.

选条件③：$b^2-2a^2=2$.

由余弦定理得 $a^2+b^2-ab=3$.

设AC 边上的中线长为 d ，由余弦定理得

$$d^2=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{2}\cdot 2\cos C$$

$$=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{2}$$

$$=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{a^2+b^2-3}{2}$$

$$=1.$$

所以 AC 边上的中线的长为1.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）根据三人投篮得分统计数据，在10场比赛中，甲共获胜3场，分别是第3场，第8场，第10场.

设 A 表示“从10场比赛中随机选择一场，甲获胜”，则

$P(A)=\frac{3}{10}$.

（Ⅱ）根据三人投篮得分统计数据，在10场比赛中，甲得分不低于10分的场次有6场，分别是第2场，第3场，第5场，第8场，第9场，第10场，其中乙得分大于丙得分的场次有 4 场，分别是第2场、第5场、第8场、第9场.

所以 X 的所有可能取值为0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_2^0C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

所以$E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$.

（Ⅲ）$D(Y_2)>D(Y_1)>D(Y_3)$.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意知 $a=3$， $2c=2\sqrt{5}$.

所以 $c=\sqrt{5}$， $b^2=a^2-c^2=4$.

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，其短轴长为 4.

（Ⅱ）设直线 CD 的方程为 $x=my+1$， $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$，则 $M(-x_1,-y_1)$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ x=my+1\end{cases}$ 得 $(4m^2+9)y^2+8my-32=0$.

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-8m}{4m^2+9}$.

由 $A(3,0)$ 得直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+3}(x-3)$.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+3}(x-3), \\ x=my+1\end{cases}$ 得 $y=\dfrac{-2y_1}{3+x_1-my_1}$.

因为 $x_1=my_1+1$，

所以 $y=-\dfrac{y_1}{2}$， $x=m(-\dfrac{y_1}{2})+1=\dfrac{2-my_1}{2}$.

所以 $N(\dfrac{2-my_1}{2},-\dfrac{y_1}{2})$.

因为 Q 为 OD 的中点，且 $x_2=my_2+1$，

所以 $Q(\dfrac{my_2+1}{2},\dfrac{y_2}{2})$.

所以直线 NQ 的斜率

$$k=\frac{\frac{y_2}{2}+\frac{y_1}{2}}{\frac{my_2+1}{2}-\frac{2-my_1}{2}}=\frac{y_2+y_1}{m(y_2+y_1)-1}=\frac{\frac{-8m}{4m^2+9}}{\frac{-8m^2}{4m^2+9}-1}=\frac{8m}{12m^2+9}.$$

当 $m\le 0$ 时， $k\le 0$.

当 $m>0$ 时，

因为 $12m+\frac{9}{m}\geq 2\sqrt{12\times 9}=12\sqrt{3}$，当且仅当 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，等号成立.

所以 $k=\frac{8m}{12m^2+9}\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

所以当 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时， k 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）①当 $a=1$ 时， $f(x)=x^2-x\sin x+b=x(x-\sin x)+b$.

记 $g(x)=x-\sin x$（ $x\geq 0$ ），则 $g'(x)=1-\cos x\geq 0$.

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

所以当 $x>0$ 时， $g(x)>g(0)=0$.

所以当 $x>0$ 时， $f(x)=x(x-\sin x)+b>b$.

②由 $f(x)=x^2-x\sin x+b$ 得 $f'(x)=2x-\sin x-x\cos x$，且 $f'(0)=0$.

当 $x>0$ 时， $f'(x)=x(1-\cos x)+x-\sin x$.

因为 $1-\cos x\geq 0$， $x-\sin x>0$，

所以 $f'(x)>0$.

因为 $f'(-x)=-f'(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$.

所以 0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-\cos x$ 的两条互相垂直的“优切线”的切点的横坐标分别为 x_1， x_2，其斜率分别为 k_1， k_2，则 $k_1k_2=-1$.

因为 $(-\cos x)'=\sin x$，

所以 $\sin x_1\cdot\sin x_2=k_1k_2=-1$.

所以 $\{\sin x_1,\sin x_2\}=\{-1,1\}$.

不妨设 $\sin x_1=1$，则 $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$.

因为 $k_1=f'(x_1)=2ax_1-\sin x_1-x_1\cos x_1$，

由“优切线”的定义可知 $2ax_1-\sin x_1-x_1\cos x_1=\sin x_1$.

所以$a=\frac{1}{x_1}=\frac{2}{4k\pi+\pi}$， $k\in\mathbf{Z}$.

由“优切线”的定义可知$\frac{1}{x_1}\cdot x_1^2-x_1\sin x_1+b=-\cos x_1$，

所以$b=0$.

当$a=\frac{2}{4k\pi+\pi}$， $k\in\mathbf{Z}$， $b=0$时，取$x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}$， $x_2=-2k\pi-\frac{\pi}{2}$，则

$f(x_1)=-\cos x_1=0$， $f(x_2)=-\cos x_2=0$， $f'(x_1)=\sin x_1=1$， $f'(x_2)=\sin x_2=-1$，

符合题意.

所以$a=\frac{2}{4k\pi+\pi}$， $k\in\mathbf{Z}$， $b=0$.

（21）（共15分）

解：

（Ⅰ） $f(A_1)=10$，$H(A_1)=12$； $f(A_2)=12$， $H(A_2)=15$.

由定义可知：将数表A中的每个数变为其相反数，或交换两行（列），$H(A)$， $f(A)$的值不变. 因为m为奇数，$a_{ij}\in\{-1,1\}$，所以$r(1),r(2),\cdots,r(m)$， $c(1),c(2),\cdots,c(m)$均不为0.

（Ⅱ）当$s\in\{0,m\}$或$t\in\{0,m\}$时，不妨设$s=0$，即$r(i)<0$， $i=1,2,\cdots,m$.

若$t=0$，结论显然成立；

若$t\neq 0$，不妨设$c(j)>0$， $j=1,2,\cdots,t$，则$(i,j)\in H$， $i=1,2,\cdots,m$， $j=1,2,\cdots,t$.

所以$H(A)\geq mt$，结论成立.

当$s\notin\{0,m\}$且$t\notin\{0,m\}$时，不妨设$r(i)>0$，$i=1,2,\cdots,s$， $c(j)>0$， $j=1,2,\cdots,t$，

则当$s+1\leq i\leq m$时， $r(i)<0$；当$t+1\leq j\leq m$时， $c(j)<0$.

因为当$i=1,2,\cdots,s$， $j=t+1,t+2,\cdots,m$时， $r(i)>0$， $c(j)<0$，

所以$(a_{ij}\cdot r(i))\cdot(a_{ij}\cdot c(j))=a_{ij}^2\cdot r(i)\cdot c(j)<0$.

1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1

所以 $(i,j)\in H$.

同理可得：$(i,j)\in H$，$i=s+1,s+2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,t$.

所以 $H(A)\geq s(m-t)+(m-s)t=mt+ms-2st$.

（Ⅲ）当 $m=5$ 时，$\dfrac{H(A)}{f(A)}$ 的最小值为 $\dfrac{8}{9}$. 对于如下的数表 A，$\dfrac{H(A)}{f(A)}=\dfrac{8}{9}$.

下面证明：$\dfrac{H(A)}{f(A)}\geq\dfrac{8}{9}$.

设 $r(1)$，$r(2)$，$\cdots$，$r(m)$ 中恰有 s 个正数，$c(1)$，$c(2)$，$\cdots$，$c(m)$ 中恰有 t 个正数，$s,t\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

①若 $s\in\{0,5\}$ 或 $t\in\{0,5\}$，不妨设 $s=0$，即 $r(i)<0$，$i=1,2,\cdots,5$.

所以当 $a_{ij}=1$ 时，$(i,j)\in H$.

由 A 中所有数不全相同，记数表 A 中 1 的个数为 a，则 $a\geq1$，且

$f(A)=\dfrac{5^2+r(1)+r(2)+\cdots+r(5)}{2}=\dfrac{25+a-(25-a)}{2}=a$，$H(A)\geq a$.

所以 $\dfrac{H(A)}{f(A)}\geq1>\dfrac{8}{9}$.

②由①设 $s\notin\{0,5\}$ 且 $t\notin\{0,5\}$.若 $s\in\{2,3\}$ 或 $t\in\{2,3\}$，不妨设 $s=2$，则由（Ⅱ）中结论知：$H(A)\geq5t+10-4t=10+t\geq11$.

因为 $0<f(A)=\dfrac{5^2-|r(1)+r(2)+\cdots+r(5)|}{2}\leq12$，

所以 $\dfrac{H(A)}{f(A)}\geq\dfrac{11}{12}>\dfrac{8}{9}$.

③由①②设 $s\notin\{0,2,3,5\}$ 且 $t\notin\{0,2,3,5\}$.

若 $\{s,t\}=\{1,4\}$，则由（Ⅱ）中结论知：$H(A)\geq25-8=17$.

因为 $0<f(A)\leq12$，

所以 $\dfrac{H(A)}{f(A)}\geq\dfrac{17}{12}>\dfrac{8}{9}$.

若 $s=t$， $s\in\{1,4\}$，不妨设 $s=t=1$， $r(1)>0$， $c(1)>0$，且 $\dfrac{H(A)}{f(A)}<1$，由（Ⅱ）中结论知： $H(A)\geq 8$.所以 $f(A)>H(A)\geq 8$.

若数表 A 中存在 a_{ij} （ $i,j\in\{2,3,4,5\}$ ）为 1，将其替换为 -1 后得到数表 A'.

因为 $H(A')=H(A)-1$， $f(A')\geq f(A)-1$，

所以 $\dfrac{H(A')}{f(A')}\leq\dfrac{H(A)-1}{f(A)-1}<\dfrac{H(A)}{f(A)}$.

所以将数表 A 中第 i 行第 j 列（ $i,j=2,3,4,5$ ）为 1 的数替换为 -1 后 $\dfrac{H(A)}{f(A)}$ 值变小.

所以不妨设 $a_{ij}=-1$（ $i,j=2,3,4,5$ ）.

因为 $H(A)\geq 5+5-2=8$， $f(A)\leq 9$，

所以 $\dfrac{H(A)}{f(A)}\geq\dfrac{8}{9}$.