东城区 2023—2024 学年度第一学期期末统一检测

高 三 数 学 2024.1

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\{x|0<x<4\}$，集合 $A=\{x|0<x<2\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$\{x|2<x<4\}$ （B）$\{x|2<x\le 4\}$

（C）$\{x|2\le x<4\}$ （D）$\{x|2\le x\le 4\}$

（2）若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$

（A）$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ （B）$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

（C）$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ （D）$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

（3）$(x+\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为

（A）1 （B）5

（C）10 （D）20

（4）设等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，S_n 为其前 n 项和，若 $a_1=2$，$a_2a_3a_4=a_9$，则 $S_3=$

（A）6 （B） 8

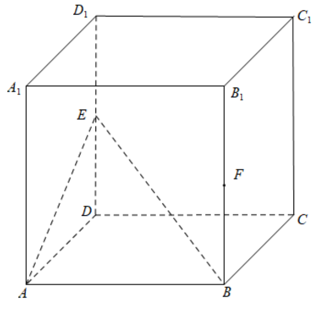
（C） 12 （D）14

（5）已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，对任意实数 λ，μ，下列结论正确的是

（A） $(\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=0$ （B） $(\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})\cdot(\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=0$

（C） $(\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=0$ （D） $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=0$

（6）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，E,F 分别是 DD_1,BB_1 的中点．用过点 F 且 平行于平面 ABE 的平面去截正方体，得到的截面图形的面积为



（A）$2\sqrt{5}$ （B）$\sqrt{6}$

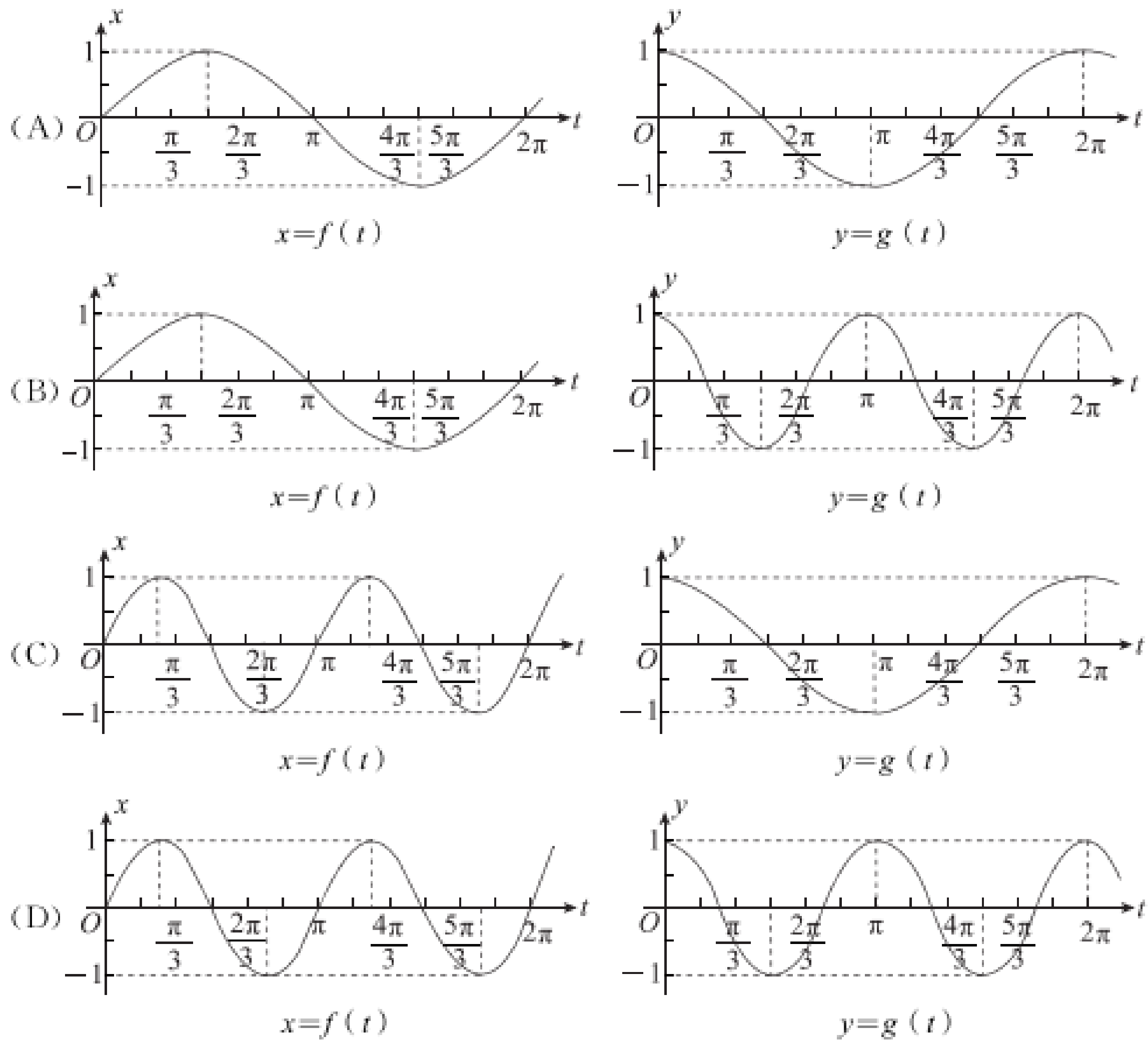
（C）$\sqrt{5}$ （D）$\frac{\sqrt{5}}{2}$

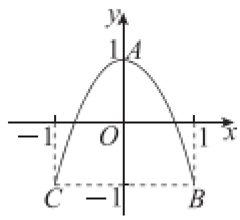
（7）已知 $a>0,b>0$，则“ $a^{\frac{1}{2}}>b^{\frac{1}{2}}$ ”是“ $\frac{1}{2^a}<\frac{1}{2^b}$ ”的

（A）充分不必要条件　　　　　　　　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）一粒子在平面上运动的轨迹为抛物线的一部分，在该平面上建立直角坐标系后，该粒子的运动轨迹如图所示．在 $t=0$ 时刻，粒子从点 $A(0,1)$ 出发，沿着轨迹曲线运动到 $B(1,-1)$，再沿着轨迹曲线途径 A 点运动到 $C(-1,-1)$，之后便沿着轨迹曲线在 B,C 两点之间在 B，C 两点之间循环往复运动．设该粒子在 t 时刻的位置对应点 $P(x,y)$，则坐标 x,y 随时间 $t(t\geq 0)$ 变化的图象可能是





（9）已知线段 AB 的长度为 10，M 是线段 AB 上的动点（不与端点重合）．点 N 在圆心为 M，半径为 MA 的圆上，且 B,M,N 不共线，则 ΔBMN 的面积的最大值为

（A）$\frac{25}{2}$　　（B）$\frac{25}{4}$　　（C）$\frac{25}{2}\sqrt{3}$　　（D）$\frac{25}{4}\sqrt{3}$

（10）设函数 $f(x)=\cos x+\sqrt{\cos 2x}$，对于下列四个判断：

① 函数 $f(x)$ 的一个周期为 π；

② 函数 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right]$；

③ 函数 $f(x)$ 的图象上存在点 $P(x,y)$，使得其到点 $(1,0)$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$；

④ 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=2$ 有且仅有一个公共点.

正确的判断是

（A）①　　（B）②　　（C）③　　（D）④

二、填空题 共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ 的定义域为__________.

（12）已知双曲线 $C:\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}=1$，则双曲线 C 的渐近线方程是 ____________；直线 $x=1$ 与双曲线相交于 M,N 两点，则 $|MN|=$__________.

（13）已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)(\varphi>0)$，若 $f(-\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{2})$，则 φ 的一个取值为__________.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x<a,\\ x^2+a, & x\geq a.\end{cases}$

① 若 $a=-2$，则 $f(x)$ 的最小值为__________；

② 若 $f(x)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是__________.

（15）一般地，对于数列 $\{a_n\}$，如果存在一个正整数 t，使得当 n 取每一个正整数时，都有 $a_{n+t}=a_n$，那么数列 $\{a_n\}$ 就叫做周期数列，t 叫做这个数列 $\{a_n\}$ 的一个周期．给出下列四个判断：

① 对于数列 $\{a_n\}$，若 $a_i\in\{1,2\}(i=1,2,3,\cdots)$，则 $\{a_n\}$ 为周期数列；

② 若 $\{a_n\}$ 满足：$a_{2n}=a_{2n+2}$，$a_{2n-1}=a_{2n+1}$ $(n\in N^*)$，则 $\{a_n\}$ 为周期数列；

③ 若 $\{a_n\}$ 为周期数列，则存在正整数 M，使得 $|a_n|<M$ 恒成立；

④已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零整数，S_n 为其前 n 项和，若存在正整数 M，使得 $|S_n|<M$ 恒成立，则 $\{a_n\}$ 为周期数列.

其中所有正确判断的序号是__________.

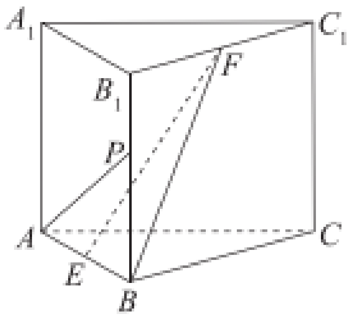
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC=BB_1=2$，E,F 分别为 AB,B_1C_1 的中点.

（Ⅰ）求证：EF // 平面 ACC_1A_1；

（Ⅱ）若点 P 是棱 BB_1 上一点，且直线 AP 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{5}$，求线段 BP 的长.



（17）（本小题 13 分）

在 ΔABC 中，$BC=4$，$AC=\sqrt{13}$，$AB=1$.

（I）求 $\angle B$；

（II）若 D 为 BC 边上一点，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 ΔABD 存在且唯一确定，求 ΔABD 的面积.

条件①：$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$；

条件②：$AD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

条件③：ΔABD 的周长为 $3+\sqrt{3}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

某科目进行考试时，从计算机题库中随机生成一份难度相当的试卷. 规定每位同学有三次考试机会，一旦某次考试通过，该科目成绩合格，无需再次参加考试，否则就继续参加考试，直到用完三次机会. 现从 2022 年和 2023 年这两年的第一次、第二次、第三次参加考试的考生中，分别随机抽取 100 位考生，获得数据如下表：

	2022 年		2023 年	
	通过	未通过	通过	未通过
第一次	60 人	40 人	50 人	50 人

第二次	70 人	30 人	60 人	40 人
第三次	80 人	20 人	m 人	$(100-m)$ 人

假设每次考试是否通过相互独立.

（I）从 2022 年和 2023 年第一次参加考试的考生中各随机抽取一位考生，估计这两位考生都通过考试的概率；

（II）小明在 2022 年参加考试，估计他不超过两次考试该科目成绩合格的概率；

（III）若 2023 年考生成绩合格的概率不低于 2022 年考生成绩合格的概率，则 m 的最小值为下列数值中的哪一个？

（直接写出结果）

m 值	83	88	93

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点为 F，左、右顶点分别为 A,B，$\left|AF\right|=2+\sqrt{3}$，$\left|BF\right|=2-\sqrt{3}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）设 O 是坐标原点，M,N 是椭圆 C 上不同的两点，且关于 x 轴对称，E,G 分别为线段 OM,MB 的中点，直线 AE 与椭圆 C 交于另一点 D． 证明： D,G,N 三点共线.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-ke^x$， $k>0$.

（Ⅰ）若 $k=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $1\le k<2$，求证：函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有极大值 m，且 $-3<m<1$.

（21）（本小题 15 分）

若有穷数列 A：a_1，a_2 ,⋯，$a_n(n>4)$ 满足：$a_i+a_{n+1-i}=c(c\in\mathrm{R}，i=1,2,\cdots，n)$，则称此数列具有性质 P_c .

（Ⅰ）若数列 $A:-2$，a_2，a_3，2，6 具有性质 P_c，求 a_2，a_3，c 的值；

（Ⅱ）设数列 A 具有性质 P_0，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，n 为奇数，若当 a_i，$a_j>0\,(1\le i，j\le n)$ 时，存在正整数 k，使得 $a_j-a_i=a_k$，求证：数列 A 为等差数列；

（III）把具有性质 P_c，且满足 $\left|a_{2k-1}+a_{2k}\right|=m(k\in\mathrm{N}^*，k\le\dfrac{n}{2}，m为常数)$ 的数列 A 构成的集合记作 $T_c(n，m)$．求出所有的 n，使得对任意给定的 m,c，当数列 $A\in T_c(n，m)$ 时，数列 A 中一定有相同的两项，即存在 $a_i=a_j(i\ne j,1\le i，j\le n)$.