北京市朝阳区2023~2024学年度第二学期期末质量检测

高一数学试卷

2024.7

（考试时间120分钟　　满分150分）

本试卷分为选择题（共50分）和非选择题（共100分）两部分

第一部分（选择题　共50分）

一、选择题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

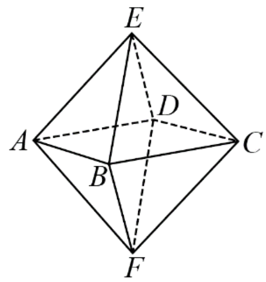
（1）若复数z满足$\mathrm{i}\cdot z=1-\mathrm{i}$，则$z=$

（A）$1+\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$　　（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$-1-\mathrm{i}$

（2）已知向量$\boldsymbol{a}=(1,5)$，$\boldsymbol{b}=(0,3)$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）3　　（D）5

（3）如图，八面体的每个面都是正三角形，并且4个顶点A，B，C，D在同一平面内，若四边形$ABCD$是边长为2的正方形，则这个八面体的表面积为



（A）8

（B）16

（C）$8\sqrt{3}$

（D）$16\sqrt{3}$

（4）已知m，n是平面α外的两条不同的直线，若$n//\alpha$，则“$m\perp n$”是“$m\perp\alpha$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）在$\triangle ABC$中，$a=2$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle B=\dfrac{5\pi}{12}$，则$c=$

（A）$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\sqrt{6}$

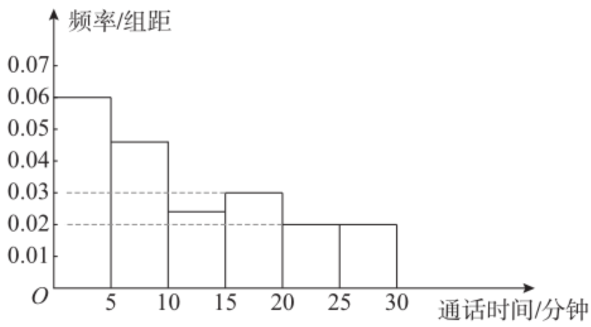
（6）李华统计了他爸爸2024年5月的手机通话明细清单，发现他爸爸该月共通话60次，他按每次通话时间长短进行分组（每组为左闭右开的区间），画出了如图所示的频率分布直方图. 则每次通话时长不低于5分钟且小于15分钟的次数为

（A）18

（B）21

（C）24

（D）27

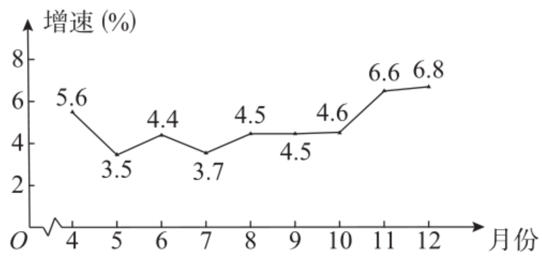


（7）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=-2t\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，若$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$同向，则实数$t$的值为

（A）- 3　　（B）-1　　（C）3　　（D）- 3或3

（8）近年来，我国国民经济运行总体稳定，延续回升向好态势. 下图是我国2023年4月到2023年12月规模以上工业增加值同比增长速度（以下简称增速）统计图.

注：规模以上工业指年主营业务收入2000万元及以上的工业企业.



下列说法正确的是

（A）4月，5月，6月这三个月增速的方差比4月，5月，6月，7月这四个月增速的方差大

（B）4月，5月，6月这三个月增速的平均数比4月，5月，6月，7月这四个月增速的平均数小

（C）连续三个月增速的方差最大的是9月，10月，11月这三个月

（D）连续三个月增速的平均数最大的是9月，10月，11月这三个月

（9）在梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$AC\perp BD$，$\angle BDC=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=2$，$DC=6$，则$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$夹角的余弦值为

（A）$\dfrac{\sqrt{7}}{14}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（10）已知$|\overrightarrow{AM}|=2$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，若动点$P$，$Q$与点$A$，$M$共面，且满足$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AM}|$，

$|\overrightarrow{BQ}|=|\overrightarrow{BM}|$，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最大值为

（A）0　　　　（B）$\frac{1}{2}$　　　　（C）1　　　　（D）2

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

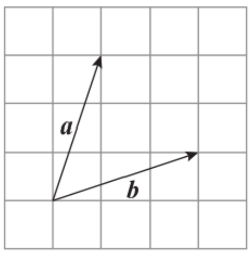
（11）已知某学校汉服社、书法社、诗歌社、曲艺社四个学生社团的人数比为 $2:2:3:3$，现用比例分配的分层随机抽样的方法，从这四个社团中抽取 20 人担任志愿者，则从曲艺社抽取的人数为_______.

（12）袋子中有 4 个大小和质地相同的小球，标号为 $1, 2, 3, 4$．若从中随机摸出一个小球，则摸到球的标号大于 3 的概率是_______；若从中随机摸出两个小球，则摸到球的标号之和为偶数的概率是_______.

（13）在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 满足 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$．若 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，则 $\lambda=$_______.

（14）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，$a=\frac{5}{2}$，若 $\triangle ABC$ 存在且唯一，则 $b\ (b\in\mathbf{Z})$ 的一个取值为_______.

（15）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$．若网格纸上小正方形的边长为 1，则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$_______，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=$_______.



（16）在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，PA 与 BC 所成的角的大小为 α，PA 与底面 $ABCD$ 所成的角的大小为 β，侧面 PAB 与底面 $ABCD$ 所成的角的大小为 γ，二面角 $A-PB-C$ 的大小为 δ．给出下列四个结论：

① $\beta<\gamma<\alpha<\delta$；

② $\tan\alpha=\sqrt{3}\tan\beta$；

③ $\tan\alpha\cos\gamma=1$；

④ $\sin\beta-\sin\delta=\sin\beta\cos\delta$.

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

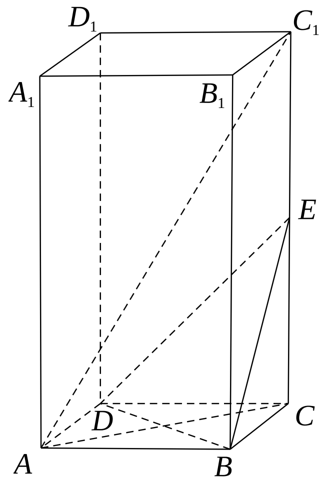
（17）（本小题 14 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$CC_1=4$，E 为 CC_1 的中点.

（Ⅰ）求证：AC_1 // 平面 EDB；

（Ⅱ）求证：平面 $EDB\perp$ 平面 ACC_1；

（Ⅲ）求点 C 到平面 EDB 的距离.



（18）（本小题 14 分）

生成式人工智能（AIGC）工具正处于蓬勃发展期，在对话系统、机器翻译、文本摘要等领域得到广泛应用. 为了解学生对生成式人工智能工具的使用情况，某校从全体学生中随机抽取了100名学生，调查得到如下数据：

经常使用	20 人
偶尔使用	30 人
从未使用	50 人

用频率估计概率.

（Ⅰ）估计该校学生经常使用生成式人工智能工具的概率；

（Ⅱ）假设每名学生使用生成式人工智能工具的情况相互独立，从该校全体学生中随机抽取两名学生，估计这两名学生中至少有一名学生经常使用生成式人工智能工具的概率；

（Ⅲ）从这100名学生中抽取5次，每次随机抽取10名学生，记第i次（$i=1,2,3,4,5$）抽取的10名学生中，有a_i名学生经常使用生成式人工智能工具，有b_i名学生偶尔使用或者从未使用过生成式人工智能工具．将a_1,a_2,a_3,a_4,a_5的方差记为s_a^2，b_1,b_2,b_3,b_4,b_5的方差记为s_b^2，比较s_a^2，s_b^2的大小．（结论不要求证明）

（19）（本小题13分）

在$\triangle ABC$中，$b+2c-2a\cos B=0$．

（Ⅰ）求$\angle A$；

（Ⅱ）若$\triangle ABC$的面积是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求a的最小值．

（20）（本小题14分）

如图1，在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，D，E分别为AC，BC的中点．将$\triangle CDE$沿DE折起到$\triangle C_1DE$的位置，得到四棱锥C_1-DABE，如图2．

（Ⅰ）求证：$DE\perp C_1A$；

（Ⅱ）若M是线段C_1B上的点，平面DEM与线段C_1A交于点N，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使点M唯一确定，并解答问题．

（ⅰ）求证：N为C_1A的中点；

（ⅱ）求证：$C_1A\perp$平面$DEMN$．

条件①：$C_1M=MB$；

条件②：$DE//NM$；

条件③：$EM\perp C_1B$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得0分；如果选择多个符合要求的条件

分别解答，按第一个解答计分.

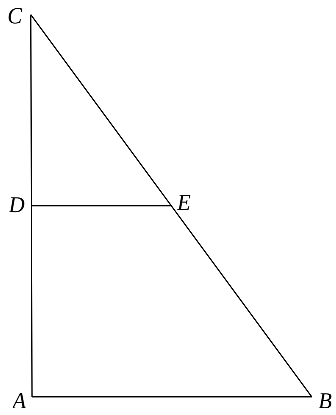


图 1

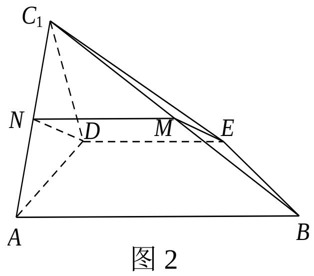


图 2

（21）（本小题 15 分）

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是由 $n\times n\,(n\geqslant 3)$ 个非负整数组成的 n 行 n 列的数表，记

$R_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$，$C_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}$，$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$. 设 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的平均数为 $\mu(A)$，若 $\mu(A)<\dfrac{n}{2}$，则称数表 A 为“n 阶 H 数表”.

（Ⅰ）判断如下两个数表是否为“4 阶 H 数表”，说明理由；

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（Ⅱ）证明：对于一个给定的正整数 n，不存在“n 阶 H 数表”A，使得 $R_i+C_j\geqslant n$ 对任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都成立；

（Ⅲ）对任意的“n 阶 H 数表”A，是否存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，满足 $a_{ij}=0$，使得 $R_i+C_j<n$？说明理由.