海淀区 2024—2025 学年第一学期期中练习

高三数学

2024. 11

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x>1\}$，$B=\{-2, 0, 1, 2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-2, 2\}$　　（B）$\{-2, 1, 2\}$

（C）$\{-2, 0, 2\}$　　（D）$\{-2, 0, 1, 2\}$

（2）若复数 z 满足 $z\cdot \mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，则 $z=$

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$

（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

（3）若 $a<b<0$，则下列不等式成立的是

（A）$a^2<b^2$　　（B）$a^2<ab$

（C）$\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$　　（D）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$

（4）已知 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，则 $f'(\dfrac{\pi}{4})=$

（A）1　　（B）2

（C）-1　　（D）-2

（5）下列不等式成立的是

（A）$\log_{0.3}0.2<1$　　（B）$0.3^{0.2}<1$

（C）$\log_{0.3}0.2<0$　　（D）$0.2^{0.3}>1$

（6）若$f(x)=\begin{cases} x^2,\ x \geqslant a, \\ 2x+3,\ x < a \end{cases}$在$\mathbf{R}$上为增函数，则$a$的取值范围是

（A）$[1,\ +\infty)$　　（B）$[3,\ +\infty)$

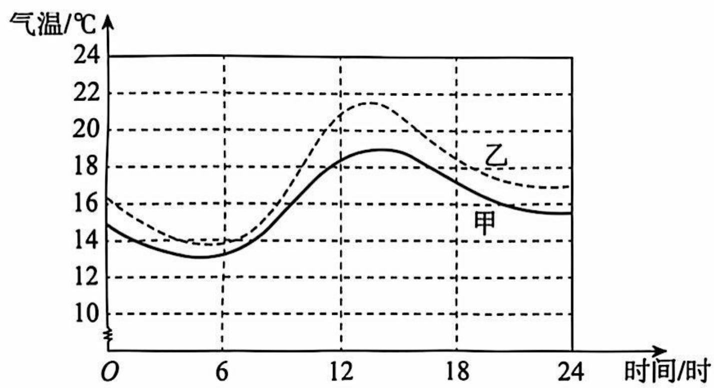
（C）$[-1,\ 3]$　　（D）$(-\infty,\ -1]\cup[3,\ +\infty)$

（7）已知向量$\boldsymbol{a}=(x,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ y)$，则下列等式中，有且仅有一组实数x，y使其成立的是

（A）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　　（B）$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=2$

（C）$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　（D）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$

（8）大面积绿化可以增加地表的绿植覆盖，可以调节小环境的气温，好的绿化有助于降低气温日较差（一天气温的最高值与最低值之差）. 下图是甲、乙两地某一天的气温曲线图. 假设除绿化外，其它可能影响甲、乙两地温度的因素均一致，则下列结论中错误的是



（A）由上图推测，甲地的绿化好于乙地

（B）当日6时到12时，甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

（C）当日12时到18时，甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

（D）当日必存在一个时刻，甲、乙两地气温的瞬时变化率相同

（9）设无穷等差数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n. 若$a_1<0$，则“T_n有最大值”是“公差$d\geqslant 0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=ra_n(1-a_n)$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$），$a_1\in(0,\ 1)$，则

（A）当$r=2$时，存在n使得$a_n\geqslant 1$

（B）当$r=3$时，存在n使得$a_n<0$

（C）当$r=3$时，存在正整数N，当$n>N$时，$a_{n+1}>a_n$

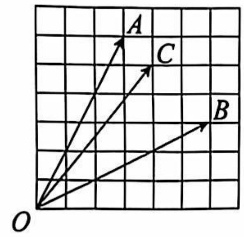
（D）当$r=2$时，存在正整数N，当$n>N$时，$a_{n+1}-a_n<\dfrac{1}{2024}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知 $10^a=2$，$10^b=5$，则 $a+b=$________.

（12）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的终边经过点 $P(2,1)$．若角 α 的终边逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边，则 $\sin\beta=$________.



（13）如右图所示，四点 O，A，B，C 在正方形网格的格点处.

若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda=$________，$\mu=$________.

（14）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）满足 $f(x)\geqslant -2f(0)$ 恒成立.

① φ 的取值范围是________；

②若 $f(\dfrac{2\pi}{3})=-2f(0)$，则 ω 的最小值为________.

（15）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$，其定义域记为集合 D，$a,b\in D$，给出下列四个结论：

① $D=\{x|x>0$ 且 $x\neq 1\}$；

②若 $ab=1$，则 $|f(a)-f(b)|>1$；

③存在 $a\neq b$，使得 $f(a)=f(b)$；

④对任意 a，存在 b 使得 $f(a)+f(b)=1$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=3^n+b$.

（Ⅰ）求 b，a_1 的值；

（Ⅱ）设 $c_n=a_{2n}+2n-1$，$n=1,2,3,\cdots$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

（17）（本小题 14 分）

设函数 $f(x)=A\sin 2x-2\sin^2 x+1$（$A>0$），从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知.

（Ⅰ）求 A 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上有且仅有两个极大值点，求 m 的取值范围.

条件①：$f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{7\pi}{12})=0$；

条件②：将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后所得的图象关于原点对称；

条件③：对于任意的实数 x_1，x_2，$|f(x_1)-f(x_2)|$ 的最大值为 4.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-a}{e^x}$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=kx-3$.

（Ⅰ）求 a，k 的值；

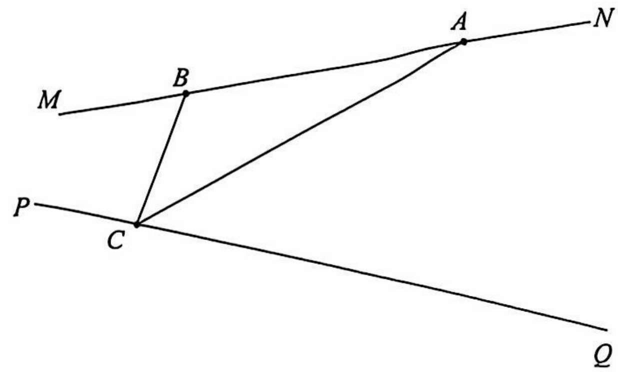
（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最小值.

(19)（本小题 14 分）

如图所示，某景区有 MN，PQ 两条公路（MN,PQ 在同一平面内），在公路上有两个景点入口 A，C，游客服务中心在点 B 处，已知 $BC=1\text{ km}$，$\angle ABC=120^\circ$，$\cos\angle BAC=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，$\cos\angle ACQ=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

（Ⅰ）已知该景区工作人员所用的对讲机是同一型号，该型号对讲机的信号有效覆盖距离为 3 km. 若不考虑其他环境因素干扰，则 A 处的工作人员与 C 处的工作人员能否用对讲机正常通话？

（Ⅱ）已知一点处接收到对讲机的信号强度与到该对讲机的距离的平方成反比. 欲在公路 CQ 段上建立一个志愿服务驿站 D，且要求在志愿服务驿站 D 接收景点入口 A 处对讲机的信号最强. 若选址 D 使 $CD=2\text{ km}$，请判断该选址是否符合要求？



(20)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=a\ln(x-a)+\dfrac{1}{2}x^2-(2a+1)x$，$a>0$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在 $x=4$ 处取得极大值，求 $f(4)$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的零点个数.

(21)(本小题 15 分)

对于 n 行 n 列 $(n \geqslant 2)$ 的数表 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，定义 T 变换：任选一组 i，j，其中 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，对于 A 的第 i 行和第 j 列的 $2n-1$ 个数，将每个数同时加 1，或者将每个数同时减 1，其余的数不变，得到一个新数表.

(Ⅰ)已知对 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 依次进行 4 次 T 变换，如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第1次}T\text{变换}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第2次}T\text{变换}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第3次}T\text{变换}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第4次}T\text{变换}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

写出 a，b，c，d 的值；

(Ⅱ)已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 是否可以依次进行有限次 T 变换，将 A 变换为 B？说明理由；

(Ⅲ)已知 11 行 11 列的数表 $C=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$，是否可以依次进行 k 次 T 变换，将其变换为

$D=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & -10 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -10 \\ -10 & \cdots & -10 & 100 \end{bmatrix}$？若可以，求 k 的最小值；若不可以，说明理由.