北京市朝阳区 2023~2024 学年度第二学期期末质量检测

高一数学参考答案

2024.7

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）D　（2）B　（3）C　（4）B　（5）C

（6）B　（7）A　（8）A　（9）D　（10）C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）6　（12）$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{3}$　（13）$\frac{2}{3}$

（14）5（答案不唯一）　（15）0　$\pm 2\sqrt{2}$　（16）①③④

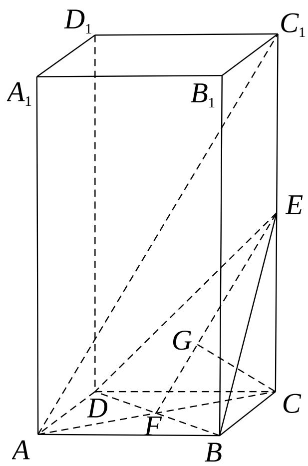
三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）设 $AC \cap BD = F$，连接 EF.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 为 AC 的中点，

又因为 E 为 CC_1 的中点，所以 $EF // AC_1$.



又 $AC_1 \not\subset$ 平面 EDB，$EF \subset$ 平面 EDB，

所以 $AC_1 //$ 平面 EDB. ……………… 5 分

（Ⅱ） 因为 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $CC_1 \perp BD$.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB = BC$，

所以底面 $ABCD$ 为正方形．所以 $AC \perp BD$.

又因为 $AC \cap CC_1 = C$，

所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1.

又因为 $BD \subset$ 平面 EDB，

所以平面 $EDB \perp$ 平面 ACC_1. ……………… 10 分

（Ⅲ）在 $\triangle EFC$ 中，过 C 作 $CG \perp EF$，垂足为 G.

因为平面 $EDB \perp$ 平面 ACC_1，平面 $EDB \cap$ 平面 $ACC_1 = EF$，$CG \subset$ 平面 ACC_1，

所以 $CG \perp$ 平面 EDB .

因为 $AB = BC = 2$，所以 $FC = \sqrt{2}$.

因为 $CC_1 = 4$， E 为 CC_1 的中点，所以 $EC = 2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中， $EF = \sqrt{FC^2 + EC^2} = \sqrt{6}$.

所以 $CG = \dfrac{FC \cdot EC}{EF} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 故点 C 到平面 EDB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ………… 14 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意知，这100名学生中有20名学生经常使用生成式人工智能工具，

故所求概率的估计值为 $\dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$. …………… 4分

（Ⅱ）设“第 i 名学生经常使用生成式人工智能工具”为事件 $A_i, i = 1, 2$，

“从该校全体学生中随机选取两名学生，至少有一名学生经常使用生成式人工智能工具”为事件 B .

则 $P(B) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})$.

由题意知， $P(A_1)$ 与 $P(A_2)$ 估计为 $\dfrac{1}{5}$， $P(\overline{A_1})$ 与 $P(\overline{A_2})$ 估计为 $1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

因此所求概率 $P(B)$ 估计为 $1 - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{9}{25}$. ……………… 11 分

（Ⅲ） $s_a^2 = s_b^2$. ……………… 14 分

（19）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $b + 2c - 2a\cos B = 0$. 所以 $b + 2c - 2a \cdot \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0$. 所以 $bc + c^2 - a^2 + b^2 = 0$.

所以 $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\dfrac{1}{2}$.

因为 $A \in (0, \pi)$，所以 $\angle A = \dfrac{2\pi}{3}$. ……………… 7 分

（Ⅱ）因为 $\triangle ABC$ 的面积是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由（Ⅰ）知 $\angle A = \dfrac{2\pi}{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．所以$bc=2$．

由（Ⅰ）知$a^2=bc+c^2+b^2\geqslant 3bc$（当且仅当$b=c=\sqrt{2}$时，取等号）

所以a的最小值为$\sqrt{6}$．　　　　………………13 分

（20）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，所以$AB\perp AC$．

因为D，E分别为AC，BC的中点，

所以$DE//AB$．所以$DE\perp AC$．

所以$DE\perp C_1D$，$DE\perp AD$．

又因为$C_1D\cap AD=D$，

所以$DE\perp$平面C_1AD．

又因为$C_1A\subset$平面C_1AD，

所以$DE\perp C_1A$．　　　　………………5 分

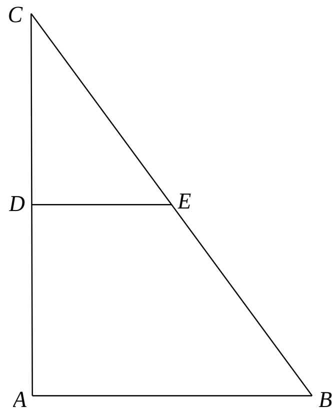


图 1

（Ⅱ）选条件①：$C_1M=MB$．

（ⅰ）因为$DE//AB$，

又因为$DE\not\subset$平面C_1AB，$AB\subset$平面C_1AB，

所以$DE//$平面C_1AB．

又因为$DE\subset$平面$DEMN$，

平面$DEMN\cap$平面$C_1AB=NM$，

所以$DE//NM$．

又因为$DE//AB$，所以$NM//AB$．

因为$C_1M=MB$，所以$C_1N=NA$．即N为C_1A的中点．　　　　………………10 分

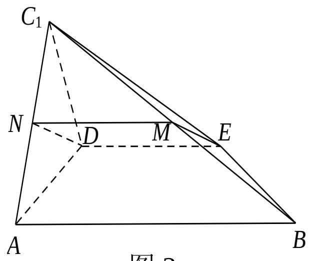


图 2

（ⅱ）因为$DC_1=DA$，由（ⅰ）得$C_1N=NA$，所以$DN\perp C_1A$．

由（Ⅰ）得$DE\perp C_1A$，

又因为$DN \cap DE = D$，

所以$C_1A \perp$平面$DEMN$. ……………… 14

分

（Ⅱ）选条件③：$EM \perp C_1B$.

又因为$EC_1 = EB$，所以$C_1M = MB$.

以下同选条件①.

（21）（本小题 15 分）

解:（Ⅰ）数表A不是"4 阶 H 数表"，数表B是"4 阶 H 数表". 理由如下：

在数表A中，$\mu(A) = \dfrac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{4} = \dfrac{6+4+4+6}{4} = 5 \geqslant 2$，

因此数表A不是"4 阶 H 数表".

在数表B中，$\mu(A) = \dfrac{1+1+1+2}{4} = \dfrac{5}{4} < 2$，因此数表$B$是"4 阶 H 数表". … 4 分

（Ⅱ）假设存在满足题设的"n阶 H 数表"A，

由题意有$R_1 + R_2 + \cdots + R_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.

又由$R_i + C_j \geqslant n$，$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，

得$\dfrac{R_1 + C_1 + R_2 + C_2 + \cdots + R_n + C_n}{n} \geqslant \dfrac{n + n + \cdots + n}{n} = n$.

而$\dfrac{R_1 + C_1 + R_2 + C_2 + \cdots + R_n + C_n}{n} = \dfrac{R_1 + R_2 + \cdots + R_n + C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$

$= \dfrac{2(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)}{n}$.

所以$\dfrac{2(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)}{n} \geqslant n$，即$\mu(A) = \dfrac{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}{n} \geqslant \dfrac{n}{2}$，

这与$\mu(A) < \dfrac{n}{2}$矛盾.

所以满足题设的"n阶 H 数表"A不存在. ……………… 9

分

（Ⅲ）对任意的"n阶 H 数表"A，存在$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，满足$a_{ij} = 0$，使得$R_i + C_j < n$.

理由如下：

记$p = \min\{R_1, R_2, \cdots, R_n, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$.

显然交换数表A中任意两行或两列的位置或行列互换，$\mu(A)$不变.

不妨设 $R_1 = p$，

因为 $\mu(A) = \dfrac{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}{n} < \dfrac{n}{2}$，所以 $R_1 + R_2 + \cdots + R_n < \dfrac{n^2}{2}$，

则 $p < \dfrac{n}{2}$.

（ i ）若 $p = 0$，则不妨设 $C_1 = \min\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，同理 $C_1 < \dfrac{n}{2}$.

则存在 $i = 1$， $j = 1$，满足 $a_{ij} = 0$，使得 $R_i + C_j < n$.

（ ii ）若 $p \neq 0$，则设自然数 q 对任意 $k \in \{q+1, q+2, \cdots, n\}$ 有 $a_{1k} = 0$.

显然 $q \leqslant p$．所以 $C_1 + C_2 + \cdots + C_q \geqslant pq$．

因此 $C_{q+1} + C_{q+2} + \cdots + C_n < \dfrac{1}{2}n^2 - pq$.

不妨设 $a_{1,q+1} + a_{2,q+1} + \cdots + a_{n,q+1} < \dfrac{\frac{1}{2}n^2 - pq}{n-q}$.

注意到 $\dfrac{1}{2}n^2 - pq - (n-q)(n-p) = -\dfrac{1}{2}n^2 + np + nq - 2pq$

$= -\dfrac{1}{2}(n-2p)(n-2q) < 0$，

即 $\dfrac{\frac{1}{2}n^2 - pq}{n-q} < n - p$.

因此 $a_{1,q+1} + a_{2,q+1} + \cdots + a_{n,q+1} < n - p$.

从而 $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{1,q+1} + a_{2,q+1} + \cdots + a_{n,q+1} < n$．

故存在 $i = 1$， $j = q + 1$， 满足 $a_{ij} = 0$，使得 $R_i + C_j < n$.　　………………　15

分