大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测

高三数学

2024.01

本试卷共 9 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U=\{x|x>1\}$，集合 $A=\{x|x\ge 2\}$，则 $C_U A=$

A. $\{x|1<x\le 2\}$　　B. $\{x|x<2\}$

C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|x\le 1\}$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot(z+\mathrm{i})=1$，则复数 z 的虚部是

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 0

3. 在 $(x^2-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

A. -15　　B. 15　　C. -20　　D. 20

4. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\ (\lambda>0)$，则 $\boldsymbol{a}=$

A. $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$　　B. $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$　　C. $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$　　D. $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

5. 已知函数 $f(x)=2^x-1$，则不等式 $f(x)\le x$ 的解集为

A. $(-\infty,2]$　　B. $[0,1]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[1,2]$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，“$C=\dfrac{\pi}{2}$”是“$\sin^2 A+\sin^2 B=1$”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7. 已知定点 $M(1,3)$ 和抛物线 $C: x^2=8y$， F 是抛物线 C 的焦点， N 是抛物线 C 上的点，则 $|NF|+|NM|$ 的最小值为

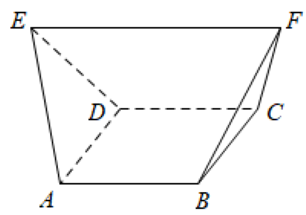
A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

8. 已知 $a>b>0$ 且 $ab=10$，则下列结论中不正确的是

A. $\lg a+\lg b>0$　　　　B. $\lg a-\lg b>0$

C. $\lg a\cdot\lg b<\frac{1}{4}$　　　　D. $\frac{\lg a}{\lg b}>1$

9. 木楔在传统木工中运用广泛. 如图，某木楔可视为一个五面体，其中四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $\triangle ADE$ ， $\triangle BCF$ 均为等边三角形， $EF // CD$， $EF=4$，则该木楔的体积为



A. $\sqrt{2}$　　　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

10. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，集合 $T=\{t \mid t=\sin a_n, n\in \mathbf{N}^*\}$. 则

A. T 不可能有无数个元素

B. 当且仅当 $d=0$ 时， T 只有 1 个元素

C. 当 T 只有 2 个元素时，这 2 个元素的乘积有可能为 $\frac{1}{2}$

D. 当 $d=\frac{2\pi}{k}$， $k\geq 2$， $k\in \mathbf{N}^*$ 时， T 最多有 k 个元素，且这 k 个元素的和为 0

第二部分（非选择题　共 110 分）

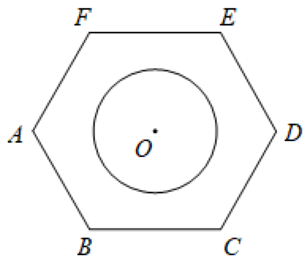
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 设$\{a_n\}$是等比数列，$a_1=1$，$a_2\cdot a_4=16$，则$a_5=$_________.

12. 若双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$的一条渐近线方程为$2x-y=0$，则$b=$_________.

13. 能够说明“设a,b,c是任意实数. 若$a>b>c$，则$ab>c^2$”是假命题的一组整数a,b,c的值依次为_________.

14. 如图是六角螺母的横截面，其内圈是半径为1的圆O，外框是以O为中心，边长为2的正六边形$ABCDEF$，则O到线段AC的距离为_________；若P是圆O上的动点，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$的取值范围是_________.



15. 设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x)$满足如下性质：（ⅰ）若将$f(x)$的图象向左平移2个单位，则所得的图象关于y轴对称；（ⅱ）若将$f(x)$图象上的所有点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{1}{2}$个单位，则所得的图象关于原点对称. 给出下列四个结论：

① $f(1)=f(3)$；　　② $f(0)=0$；

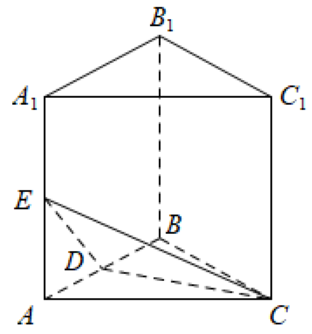
③ $f(2)+f(4)=0$；　　④ $f(-\frac{1}{2})f(\frac{11}{2})\le 0$.

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$CA=CB=\sqrt{5}$，$AA_1=AB=2$，D,E 分别为 AB,AA_1 的中点.



（Ⅰ）求证：平面 $CDE\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

17,（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，$a=1$，$b=2$.

（Ⅰ）若$c=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积；

（Ⅱ）在下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在，求$\angle A$.

条件①：$\angle B=2\angle A$；　条件②：$\angle B+\frac{\pi}{3}=\angle A$；　条件③：$\angle C=2\angle A$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 13 分）

为了解客户对 A,B 两家快递公司的配送时效和服务满意度情况，现随机获得了某地区客户对这两家快递公司评价的调查问卷．已知 A,B 两家公司的调查问卷分别有 120 份和 80 份，全部数据统计如下：

快递公司	A 快递公司		B 快递公司	
项目 / 份数 / 评价分数	配送时效	服务满意度	配送时效	服务满意度
$85\le x\le 95$	29	24	16	12
$75\le x<85$	47	56	40	48
$65\le x<75$	44	40	24	20

假设客户对 A,B 两家快递公司的评价相互独立．用频率估计概率．

（Ⅰ）从该地区选择 A 快递公司的客户中随机抽取 1 人，估计该客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率；

（Ⅱ）分别从该地区 A 和 B 快递公司的样本调查问卷中，各随机抽取 1 份，记 X 为这 2 份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分的份数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记评价分数 $x\ge 85$ 为“优秀”等级，$75\le x<85$ 为“良好”等级，$65\le x<75$ 为“一般”等级．已知小王比较看重配送时效的等级，根据该地区 A,B 两家快递公司配送时效的样本评价分数的等级情况，你认为小王选择 A,B 哪家快递公司合适？说明理由．

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$， $B(2,0)$，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过点 $T(4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N，直线 BM 与直线 $x=1$ 相交于点 P，直线 AN 与 y 轴相交于点 Q. 求证：$\triangle OAQ$ 与 $\triangle OTP$ 的面积之比为定值.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax+\ln\frac{1-x}{1+x}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 0 ，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $a=4$ 时，求 $f(x)$ 的零点个数；

（Ⅲ）证明：$0\le a\le 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分而不必要条件.

21.（本小题 15 分）

若各项为正的无穷数列$\{a_n\}$满足：对于$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}^2-a_n^2=d$，其中d为非零常数，则称数列$\{a_n\}$为D数列. 记$b_n=a_{n+1}-a_n$.

（Ⅰ）判断无穷数列$a_n=\sqrt{n}$和$a_n=2^n$是否是D数列，并说明理由；

（Ⅱ）若$\{a_n\}$是D数列，证明：数列$\{b_n\}$中存在小于1的项；

（Ⅲ）若$\{a_n\}$是D数列，证明：存在正整数n，使得$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>2024$.