

石景山区 2023-2024 学年第一学期初三期末试卷

数 学

学校_____ 姓名_____ 准考证号_____

考生
须知

1. 本试卷共 8 页，共两部分，28 道题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。
3. 试卷答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
4. 考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

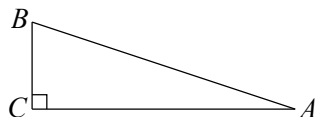
第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 若 $3x = 4y$ ($y \neq 0$)，则 $\frac{x}{y}$ 的值是

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{7}{3}$

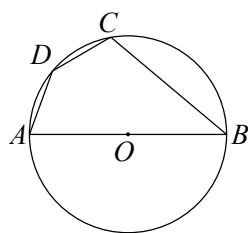
2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3BC$ ，则 $\sin A$ 为

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
(C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$



3. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是直径， D 是 $\widehat{AC}$ 的中点。若 $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle A$ 的大小为

(A) 50° (B) 60°
(C) 70° (D) 80°



4. 将抛物线 $y = 3x^2$ 向左平移 1 个单位长度，平移后抛物线的解析式为

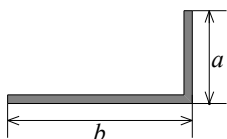
(A) $y = 3(x+1)^2$ (B) $y = 3(x-1)^2$ (C) $y = 3x^2 + 1$ (D) $y = 3x^2 - 1$

5. 若抛物线 $y = x^2 + 2mx + 9$ 与 x 轴只有一个交点，则 m 的值为

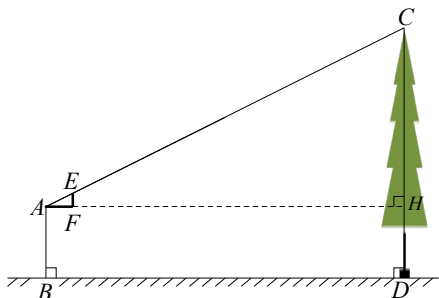
(A) 3 (B) -3 (C) $\pm 3\sqrt{2}$ (D) ± 3

6. 如图1, “矩”在古代指两条边成直角的曲尺, 它的两边长分别为 a , b . 中国古老的天文和数学著作《周髀算经》中简明扼要地阐述了“矩”的功能: “平距以正绳, 偃矩以望高, 覆矩以测深, 卧矩以知远, 环矩以为圆, 合矩以为方”. 其中“偃矩以望高”的意思就是把“矩”仰立放可测物体的高度. 如图2, 从“矩” AFE 的一端 A 望向树顶端的点 C , 使视线通过“矩”的另一端 E , 测得 $BD=8\text{m}$, $AB=1.6\text{m}$. 若“矩”的边 $EF=a=30\text{cm}$, 边 $AF=b=60\text{cm}$, 则树高 CD 为

- (A) 4m (B) 5.3m
(C) 5.6m (D) 16m



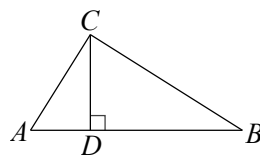
第6题图1



第6题图2

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $(4, y_1)$, $(6, y_2)$ 在抛物线 $y = a(x-3)^2 + 1 (a > 0)$ 上, 则下列结论正确的是
- (A) $1 < y_1 < y_2$ (B) $1 < y_2 < y_1$ (C) $y_2 < y_1 < 1$ (D) $y_1 < y_2 < 1$
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$ 于点 D , 给出下面三个条件:

- ① $\angle A = \angle BCD$;
② $\angle A + \angle BCD = \angle ADC$;
③ $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$.



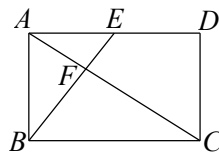
添加上述条件中的一个, 即可证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形的条件序号是

- (A) ①② (B) ①③ (C) ②③ (D) ①②③

第二部分 非选择题

二、填空题 (共16分, 每题2分)

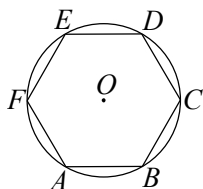
9. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 的中点, 连接 BE 交对角线 AC 于点 F . 若 $AC=6$, 则 AF 的长为_____.
10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $(3, y_1)$, $(7, y_2)$ 在反比例



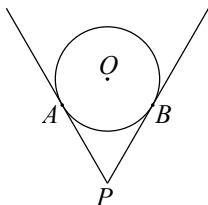
函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上, 则 y_1 _____ y_2 (填“>”“=”或“<”).

11. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ， $AB=12$ ，

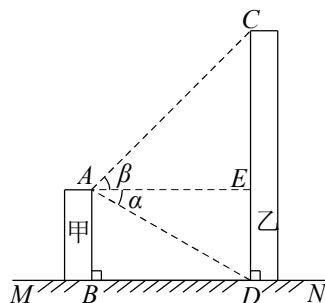
则 $\widehat{AB}$ 的长为_____.



第 11 题



第 12 题

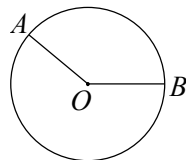


第 13 题

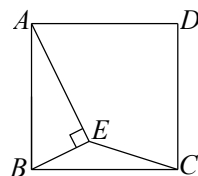
12. 如图， PA ， PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A ， B 两点， $\angle P=60^\circ$ ， $PA=6$ ，则 $\odot O$ 的半径为_____.

13. 如图，线段 AB ， CD 分别表示甲、乙建筑物的高，两座建筑物间的距离 BD 为 30m. 若在点 A 处测得点 D 的俯角 α 为 30° ，点 C 的仰角 β 为 45° ，则乙建筑物的高 CD 约为_____m (结果精确到 0.1m; 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$).

14. 如图，点 A ， B 在 $\odot O$ 上， $\angle AOB=140^\circ$. 若 C 为 $\odot O$ 上任一点 (不与点 A ， B 重合)，则 $\angle ACB$ 的大小为_____.



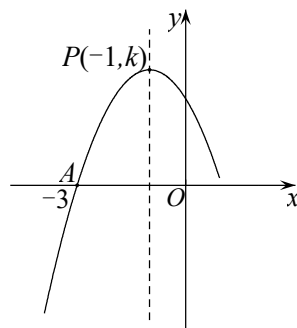
15. 如图， E 是正方形 $ABCD$ 内一点，满足 $\angle AEB=90^\circ$ ，连接 CE . 若 $AB=2$ ，则 CE 长的最小值为_____.



16. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的顶点为 $P(-1,k)$ ，且经过点 $A(-3,0)$ ，其部分图象如图所示，下面四个结论中，

- ① $a < 0$;
- ② $b = -2a$;
- ③ 若点 $M(2,m)$ 在此抛物线上，则 $m < 0$;
- ④ 若点 $N(t,n)$ 在此抛物线上且 $n < c$ ，则 $t > 0$.

所有正确结论的序号是_____.



三、解答题（共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）

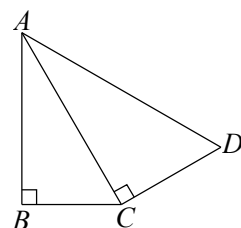
解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算： $8\sin 60^\circ - \sqrt{27} + (-1)^{2024} - \tan 45^\circ$.

18. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 平分 $\angle BAD$ ，
 $\angle ACD = \angle B = 90^\circ$.

(1) 求证： $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ；

(2) 若 $AB = 3$ ， $AD = 4$ ，求 AC 的长.



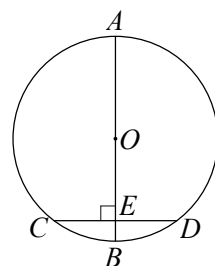
19. 已知二次函数 $y = x^2 + 2x - 3$.

(1) 将 $y = x^2 + 2x - 3$ 化成 $y = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$ 的形式，并写出其图象的顶点坐标；

(2) 求此函数图象与 x 轴交点的坐标；

(3) 在平面直角坐标系 xOy 中，画出此函数的图象.

20. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，
 $CD = 6$ ， $BE = 1$. 求 $\odot O$ 的半径.



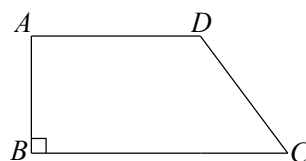
21. 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象过点 $A(1, 0)$ 和 $B(0, -3)$.

(1) 求这个二次函数的解析式；

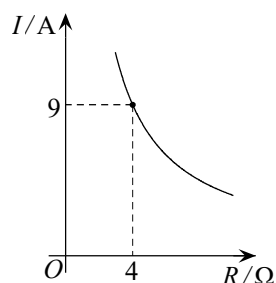
(2) 当 $1 < x < 4$ 时，结合图象，直接写出函数值 y 的取值范围.

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $\cos C = \frac{3}{5}$ ， $CD = 10$ 。

求 AB 的长。



23. 已知某蓄电池的电压为定值，使用此电源时，用电器的电流 I （单位：A）与电阻 R （单位： Ω ）成反比例函数关系，即 $I = \frac{k}{R}$ ($k \neq 0$)，其图象如图所示。



(1) 求 k 的值；

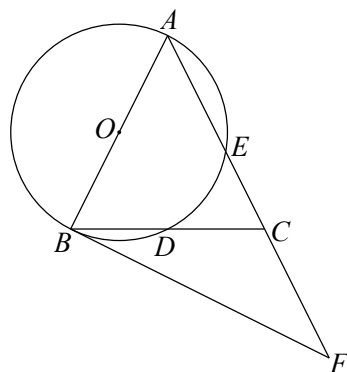
(2) 若用电器的电阻 R 为 6Ω ，则电流 I 为_____A；

(3) 如果以此蓄电池为电源的用电器的电流 I 不得超过 $10A$ ，那么用电器的电阻 R 应控制的范围是_____。

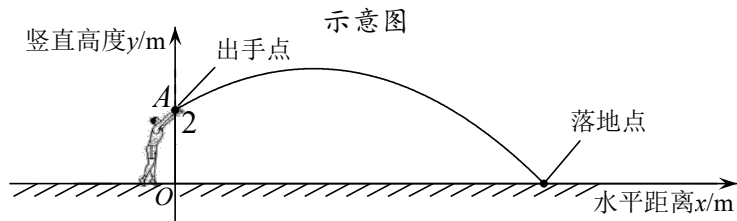
24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，交 AC 于点 E ，点 F 在 AC 的延长线上， $\angle CBF = \frac{1}{2} \angle BAC$ 。

(1) 求证： BF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AB = 5$ ， $\tan \angle CBF = \frac{1}{2}$ ，求 CE 的长。



25. 投掷实心球是北京市初中学业水平考试体育现场考试的选考项目之一. 实心球被投掷后的运动路线可以看作是抛物线的一部分. 建立如图所示的平面直角坐标系, 实心球从出手(点 A 处)到落地的过程中, 其竖直高度 y (单位: m) 与水平距离 x (单位: m) 近似满足二次函数关系.



小石进行了三次训练, 每次实心球的出手点 A 的竖直高度为 2m . 记实心球运动路线的最高点为 P , 训练成绩 (实心球落地点的水平距离) 为 d (单位: m). 训练情况如下:

	第一次训练	第二次训练	第三次训练
训练成绩	$d_1 = 8.39\text{m}$	d_2	d_3
最高点	$P_1(3, 2.9)$	$P_2(4, 3.6)$	$P_3(3, 3.4)$
满足的函数关系式	$y_1 = -0.1(x - 3)^2 + 2.9$	$y_2 = a(x - h)^2 + k$ ($a < 0$)	$y_3 = -0.15(x - 3)^2 + 3.4$

根据以上信息,

- (1) 求第二次训练时满足的函数关系式;
- (2) 小石第二次训练的成绩 d_2 为_____ m ;
- (3) 直接写出训练成绩 d_1 , d_2 , d_3 的大小关系.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 经过点 $A(3, 3a + c)$.

(1) 求该抛物线的对称轴；

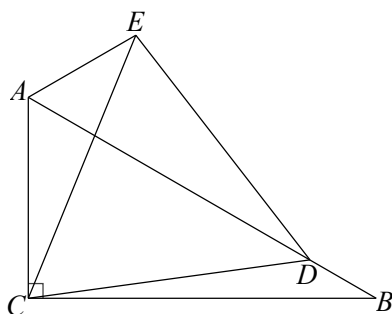
(2) 点 $M(1 - 2a, y_1)$ ， $N(a + 2, y_2)$ 在抛物线上. 若 $c < y_1 < y_2$ ，求 a 的取值范围.

27. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$. D 是边 BA 上一点（不与点 B 重合且 $BD < \frac{1}{2}BA$ ），将线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 60° 得到线段 CE ，连接 DE ， AE .

(1) 求 $\angle CAE$ 的度数；

(2) F 是 DE 的中点，连接 AF 并延长，交 CD 的延长线于点 G ，依题意补全图形.

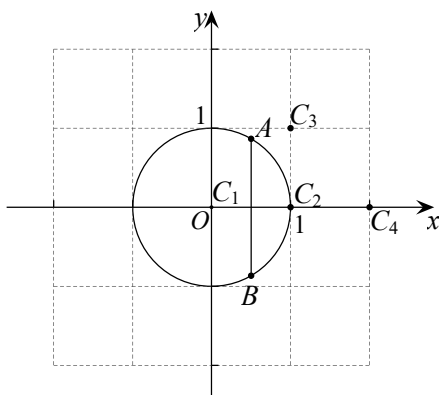
若 $\angle G = \angle ACE$ ，用等式表示线段 FG ， AF ， AE 之间的数量关系，并证明.



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为1. 对于 $\odot O$ 的弦 AB 和点 C 给出如下定义: 若点 C 在弦 AB 的垂直平分线上, 且点 C 关于直线 AB 的对称点在 $\odot O$ 上, 则称点 C 是弦 AB 的“关联点”.

(1) 如图, 点 $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

在点 $C_1(0, 0)$, $C_2(1, 0)$, $C_3(1, 1)$, $C_4(2, 0)$ 中, 弦 AB 的“关联点”是_____;



(2) 若点 $C(\frac{1}{2}, 0)$ 是弦 AB 的“关联点”, 直接写出 AB 的长;

(3) 已知点 $M(0, 2)$, $N(\frac{2\sqrt{15}}{15}, 0)$. 对于线段 MN 上一点 S , 存在 $\odot O$ 的弦 PQ , 使得点 S 是弦 PQ 的“关联点”. 记 PQ 的长为 t , 当点 S 在线段 MN 上运动时, 直接写出 t 的取值范围.