北京市朝阳区 2024-2025 学年度第一学期期中质量检测

高三数学试卷　　2024.11

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.设集合 $A=\{x|0\le x\le 2\}$，集合 $B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A.$\{x|1<x\le 2\}$　　B.$\{x|0\le x\le 2\}$

C.$\{x|0\le x<3\}$　　D.$\{x|1<x<3\}$

2.若函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}(x>0)$ 在 $x=a$ 处取得最小值，则 $a=$（　）

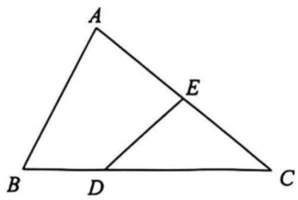
A.1　B.$\sqrt{2}$　C.2　D.4

3.下列函数中，既是奇函数又在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增的是（　）

A. $y=2^x$　　B. $y=\ln|x|$

C. $y=\tan x$　　D. $y=x-\dfrac{2}{x}$

4.如图，在$\triangle ABC$ 中，$BD=\dfrac{1}{3}BC$，$AE=\dfrac{1}{2}AC$，则（　）



A. $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{DE}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{DE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

5.已知单位向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 满足 $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$，设向量 $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$，则向量 $\vec{c}$ 与向量 $\vec{i}$ 夹角的余弦值是（　）

A. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　B. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6.《九章算术》是我国古代数学名著，书中有如下的问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？”意思是：“一女子善于织布，每天织的布都是前一天的 2 倍，已知她 5 天共织布 5 尺，问这女子每天分别织布多少？”.由此推算，在这 5 天中，织布超过 1 尺的天数共有（　）

A.1 天　B.2 天　C.3 天　D.4 天

7.已知 α，β 均为第二象限角，则“$\sin\alpha>\sin\beta$”是“$\cos\alpha>\cos\beta$”的（　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

8.已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\le 0, \\ 2\sqrt{x+1}, x>0. \end{cases}$ 若直线 $y=x+m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有且只有一个公共点，则实数 m 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$

C. $(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

9.在三棱锥 *O-ABC* 中，棱 *OA*，*OB*，*OC* 两两垂直，点 *P* 在底面 *ABC* 内，已知点 *P* 到 *OA*，*OB*，*OC* 所在直线的距离分别为 1，2，2，则线段 *OP* 的长为（　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　C.3　D. $\frac{9}{2}$

10.数学家康托尔创立了集合论，集合论的产生丰富了现代计数方法.记 $|S|$ 为集合 S 的元素个数，$\varphi(S)$ 为集合 S 的子集个数，若集合 A，B，C 满足：

①$|A|=99$，$|B|=100$；

②$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)=\varphi(A\cup B\cup C)$，

则 $|A\cap B\cap C|$ 的最大值是（　）

A.99B.98C.97D.96

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.计算 $\frac{2i}{1-i}=$________.

12.在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，则 $\sin A=$__________；$\tan(\pi-A)=$________.

13.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=An^2+Bn$（A，B 为常数），写出一个有序数对 $(A,B)=$________，使得数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

14.某种灭活疫苗的有效保存时间 T（单位：h）与储藏的温度 t（单位：℃）满足函数关系 $T=e^{kt+b}$（k，b 为常数，其中 $e=2.71828\cdots$）.已知该疫苗在 0℃时的有效保存时间是 1440h，在 5℃时的有效保存时间是 360h，则该疫苗在 10℃时的有效保存时间是________h.

15.对于无穷数列 $\{a_n\}$，若存在常数 $M>0$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有不等式

$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\le M$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.给出下列四个结论：

①存在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P；

②以 1 为首项，$q(|q|<1)$ 为公比的等比数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P；

③若由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和构成的数列 $\{S_n\}$ 具有性质 P，则数列 $\{a_n\}$ 也具有性质 P；

④若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均具有性质 P，则数列 $\{a_nb_n\}$ 也具有性质 P.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 13 分）

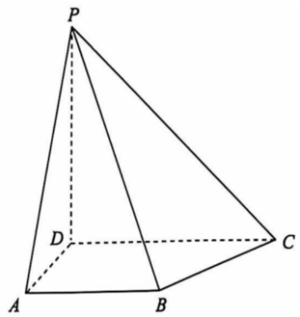
在$\triangle ABC$中，$a\cos C+c\cos A=2a$.

（I）求 $\dfrac{b}{a}$ 的值；

（II）若 $A=\dfrac{\pi}{6}$，$c=\sqrt{3}$，求 b 及$\triangle ABC$的面积.

17.（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AD\perp CD$，$AB=AD=2$，$CD=PD=3$.



（I）求证：$AB\perp$ 平面 PAD；

（II）求平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值；

（III）记平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l.试判断直线 AB 与 l 的位置关系，并说明理由.

18.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=ax-\ln(x+1)(a\in\mathbf{R})$.

（I）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的最小值；

（II）若 $f(x)$ 存在极小值，求 a 的取值范围.

19.（本小题 14 分）

设函数 $f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+2\cos^2\omega x\sin\varphi\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（I）若 $\omega=1$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，求 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值；

（II）已知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的对称轴，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω，φ 的值.

条件①：当 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取到最小值；

条件②：$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{2}$；

条件③：$f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减.

注：如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）讨论 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,+\infty)$ 上的零点个数；

（III）若 $f(m)=n$，其中 $m>0$，求证：$n-m>2$.

21.（本小题 15 分）

若有穷正整数数列 A：a_1，a_2，a_3，…，$a_{2n}(n\geq 3)$ 满足如下两个性质，则称数列 A 为 T 数列：

① $a_{2i-1}+a_{2i}=2^i(i=1,2,3,\cdots,n)$；

②对任意的 $i\in\{1,2,3,\cdots,2n-1\}$，都存在正整数 $j\leq i$，使得 $a_{i+1}=a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_{j+(i-j)}$.

（I）判断数列 A：1，1，1，3，3，5 和数列 B：1，1，2，2，4，4，4，12 是否为 T 数列，说明理由；

（II）已知数列 A：a_1，a_2，a_3，…，$a_{2n}(n\geq 3)$ 是 T 数列.

（i）证明：对任意的 $i\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，$a_{2i}=3\times 2^{i-2}$ 与 $a_{2i+1}=3\times 2^{i-2}$ 不能同时成立；

（ii）若 n 为奇数，求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的最大值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）