密 封 线 内 不 要 答 题

大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测试卷

高三数学

2024.01

本试卷共 4 页、150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U=\{x|x>1\}$，集合 $A=\{x|x\geqslant 2\}$，则 $\complement_U A=$

(A) $\{x|1<x\leqslant 2\}$　　(B) $\{x|x<2\}$

(C) $\{x|1<x<2\}$　　(D) $\{x|x\leqslant 1\}$

(2) 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot(z+\mathrm{i})=1$，则复数 z 的虚部是

(A) -2　　(B) 2

(C) -1　　(D) 0

(3) 在 $(x^2-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

(A) -15　　(B) 15

(C) -20　　(D) 20

(4) 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda>0)$，则 $\boldsymbol{a}=$

(A) $(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5})$　　(B) $(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$

(C) $(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5})$　　(D) $(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$

(5) 已知函数 $f(x)=2^x-1$，则不等式 $f(x)\leqslant x$ 的解集为

(A) $(-\infty,2]$　　(B) $[0,1]$

(C) $[1,+\infty)$　　(D) $[1,2]$

(6) 在 $\triangle ABC$ 中，“$C=\dfrac{\pi}{2}$”是“$\sin^2A+\sin^2B=1$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

( ) 已知定点 $M(1,3)$ 和抛物线 C：$x^2=8y$，F 是抛物线 C 的焦点，N 是抛物线 C 上的点，则 $|NF|+|NM|$ 的最小值为

(A) 3　　(B) 4

(C) 5　　(D) 6

(8)已知 $a>b>0$ 且 $ab=10$,则下列结论中不正确的是

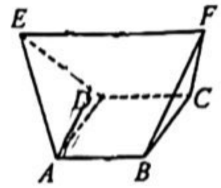
(A)$\lg a+\lg b>0$　　　　(B)$\lg a-\lg b>0$

(C)$\lg a\cdot\lg b<\frac{1}{4}$　　　　(D)$\frac{\lg a}{\lg b}>1$

(9)木楔在传统木工中运用广泛．如图,某木楔可视为一个五面体,其中四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为等边三角形,$EF/\!/CD$,$EF=4$,则该木楔的体积为

(A)$\sqrt{2}$　　　　(B)$2\sqrt{2}$

(C)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　(D)$\frac{8\sqrt{2}}{3}$



(10)设无穷等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,集合 $T=\{t\,|\,t=\sin a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$．则

(A)T 不可能有无数个元素

(B)当且仅当 $d=0$ 时,T 只有 1 个元素

(C)当 T 只有 2 个元素时,这 2 个元素的乘积有可能为$\frac{1}{2}$

(D)当 $d=\frac{2\pi}{k}$,$k\geqslant 2$,$k\in\mathbf{N}^*$ 时,T 最多有 k 个元素,且这 k 个元素的和为 0

第二部分(非选择题　共 110 分)

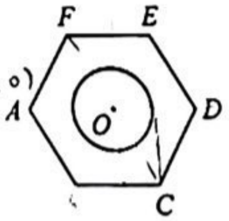
二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

(11)设$\{a_n\}$是等比数列,$a_1=1$,$a_2\cdot a_4=16$,则 $a_5=$________．

(12)若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $2x-y=0$,则 $b=$________．

(13)能够说明"设 a,b,c 是任意实数．若 $a>b>c$,则 $ab>c^2$"是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为________．

(14)如图是六角螺母的横截面,其内圈是半径为 1 的圆 O,外框是以 O 为中心,边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$,则 O 到线段 AC 的距离为_____;若 P 是圆 O 上的动点,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是___



(15)设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(x)$ 满足如下性质:(i)若将 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位,则所得的图象关于 y 轴对称;(ii)若将 $f(x)$ 图象上的所有点的纵坐标不变,横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,再向左平移$\frac{1}{2}$个单位,则所得的图象关于原点对称．给出下列四个结论:

①$f(1)=f(3)$;　　　　②$f(0)=0$;

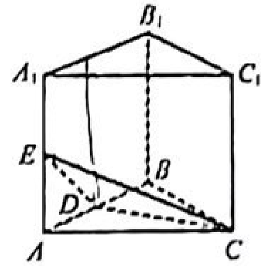
③$f(2)+f(4)=0$;　　　　④$f(-\frac{1}{2})f(\frac{11}{2})\leqslant 0$.

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题14分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$CA=CB=\sqrt{5}$，$AA_1=AB=2$，D，E 分别为 AB，AA_1 的中点．



(Ⅰ)求证：平面 $CDE\perp$ 平面 ABB_1A_1；

(Ⅱ)求直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值．

(17)(本小题13分)

在$\triangle ABC$中 $a=1$，$b=2$．

(Ⅰ)若 $c=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积；

(Ⅱ)在下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在，求$\angle A$．

条件①：$\angle B=2\angle A$；　　条件②：$\angle B=\frac{\pi}{3}+\angle A$；　　条件③：$\angle C=2\angle A$．

注：如果选择的条件不符合要求，第(Ⅱ)问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

(18)(本小题13分)

为了解客户对A，B两家快递公司的配送时效和服务满意度情况，现随机获得了某地区客户对这两家快递公司评价的调查问卷．已知A，B两家公司的调查问卷分别有120份和80份，全部数据统计如下：

快递公司	A快递公司		B快递公司	
项目 / 评价分数 \ 份数	配送时效	服务满意度	配送时效	服务满意度
$85\leqslant x\leqslant 95$	29	24	16	12
$75\leqslant x<85$	47	56	40	48
$65\leqslant x<75$	44	40	24	20

假设客户对A，B两家快递公司的评价相互独立．用频率估计概率．

(Ⅰ)从该地区选择A快递公司的客户中随机抽取1人，估计该客户对A快递公司配送时效的评价不低于75分的概率；

（Ⅱ）分别从该地区 A 和 B 快递公司的样本调查问卷中，各随机抽取 1 份，记 X 为这 2 份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分的份数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记评价分数 $x\geqslant 85$ 为"优秀"等级，$75\leqslant x<85$ 为"良好"等级，$65\leqslant x<75$ 为"一般"等级．已知小王比较看重配送时效的等级，根据该地区 A，B 两家快递公司配送时效的样本评价分数的等级情况，你认为小王选择 A，B 哪家快递公司合适？说明理由．

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过点 $T(4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M，N，直线 BM 与直线 $x=1$ 相交于点 P，直线 AN 与 y 轴相交于点 Q．求证：$\triangle OAQ$ 与 $\triangle OTP$ 的面积之比为定值．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax+\ln\frac{1-x}{1+x}$．

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 0，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $a=4$ 时，求 $f(x)$ 的零点个数；

（Ⅲ）证明：$0\leqslant a\leqslant 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分而不必要条件．

（21）（本小题 15 分）

若各项为正的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}^2-a_n^2=d$，其中 d 为非零常数，则称数列 $\{a_n\}$ 为 D 数列．记 $b_n=a_{n+1}-a_n$．

（Ⅰ）判断无穷数列 $a_n=\sqrt{n}$ 和 $a_n=2^n$ 是否是 D 数列，并说明理由；

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 是 D 数列，证明：数列 $\{b_n\}$ 中存在小于 1 的项；

（Ⅲ）若 $\{a_n\}$ 是 D 数列，证明：存在正整数 n，使得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>2024$．

密 封 线 内 不 要 答 题