北京市丰台区 2023 ~2024 学年度第二学期综合练习(一)

高 三 数 学

2024.03

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x\leqslant 0\}$，$B=\{x|x-1>0\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{x|x\geqslant 0\}$　　(B) $\{x|0\leqslant x<1\}$　　(C) $\{x|x>1\}$　　(D) $\{x|1<x\leqslant 2\}$

2. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_5-2a_3=1$，且 $a_2=0$，则 $d=$

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

3. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则 $a=$

(A) 2　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

4. $(x^2-\dfrac{2}{x})$ 的展开式中，x 的系数为

(A) -80　　(B) -40　　(C) 40　　(D) 80

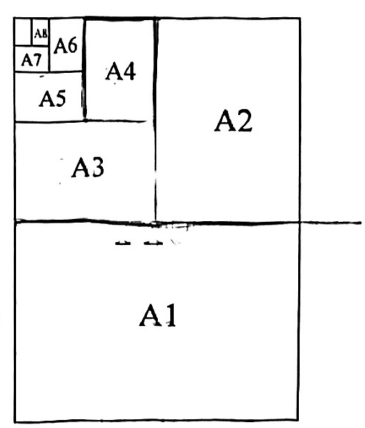
5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则 $\lambda=$

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 2　　(D) 4

6. 按国际标准，复印纸幅面规格分为 A 系列和 B 系列，其中 A 系列以 A0，A1，…等来标记纸张的幅面规格，具体规格标准为：

①A0 规格纸张的幅宽和幅长的比例关系为 $1:\sqrt{2}$；

②将 Ai($i=0,1,\cdots,9$) 纸张平行幅宽方向裁开成两等份，便成为 A($i+1$) 规格纸张(如图).



某班级进行社会实践活动汇报，要用 A0 规格纸张裁剪其他规格纸张. 共需 A4 规格纸张 40 张，A2 规格纸张 10 张，A1 规格纸张 5 张. 为满足上述要求，至少提供 A0 规格纸张的张数为

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l:ax+by=1$ 上有且仅有一点 P，使 $|OP|=1$，则直线 l 被圆 $C:x^2+y^2=4$ 截得的弦长为

(A) 1　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $2\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，则"$\alpha=\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$"是"$f(x+\alpha)$ 是偶函数，且 $f(x-\alpha)$ 是奇函数"的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 正月十五元宵节，中国民间有观赏花灯的习俗. 在 2024 年元宵节，小明制作了一个"半正多面体"形状的花灯（图 1）. 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体，体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 24 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 2. 关于该半正多面体的四个结论：

①棱长为 $\sqrt{2}$；

②两条棱所在直线异面时，这两条异面直线所成角的大小是 $60°$；

③表面积为 $S=12+4\sqrt{3}$；

④外接球的体积为 $V=4\sqrt{3}\pi$.

其中所有正确结论的序号是

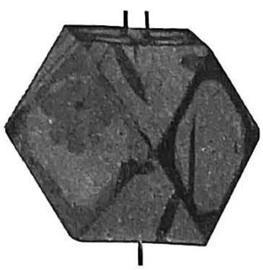


图 1

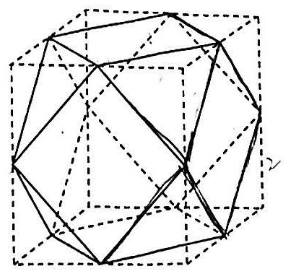


图 2

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ③④

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}(n=2k,k\in\mathbf{N}^*),\\ \frac{a_n+1}{2}(n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$ 则

(A) 当 $a_1<0$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立

(B) 当 $a_1>1$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，且存在常数 $M>0$，使得 $a_n>M$ 恒成立

(C) 当 $0<a_1<1$ 时，存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$|a_n-\frac{1}{2}|<\frac{1}{100}$

(D) 当 $0<a_1<1$ 时，对于任意正整数 N_0，存在 $n>N_0$，使得 $|a_n-\frac{1}{2}|>\frac{1}{1000}$

第二部分 （非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. $\frac{1+2i}{3-4i}=$ ________.

12. 在$\triangle ABC$中，若$b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，$\cos A=\frac{3}{5}$，则$a=$ ________.

13. 已知F是抛物线$y^2=4x$的焦点，A，B是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=8$，则线段AB的中点到y轴的距离为________.

14. 已知函数$f(x)$具有下列性质：

①当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$时，都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$；

②在区间$(0,+\infty)$上，$f(x)$单调递增；

③$f(x)$是偶函数.

则$f(0)=$ ________；函数$f(x)$可能的一个解析式为$f(x)=$ ________.

15. 目前发射人造天体，多采用多级火箭作为运载工具. 其做法是在前一级火箭燃料燃烧完后，连同其壳体一起抛掉，让后一级火箭开始工作，使火箭系统加速到一定的速度时将人造天体送入预定轨道. 现有材料科技条件下，对于一个n级火箭，在第n级火箭的燃料耗尽时，火箭的速度可以近似表示为

$$v=3\ln\frac{10^n a_1a_2\cdots a_n}{(9+a_1)(9+a_2)\cdots(9+a_n)},$$

其中$a_i=\dfrac{m_p+\sum\limits_{j=i}^{n}m_j}{m_p+\sum\limits_{j=i}^{n}m_j-m_i}(i=1,2,\cdots,n)$.

注：m_p表示人造天体质量，m_j表示第$j(j=1,2,\cdots,n)$级火箭结构和燃料的总质量.

给出下列三个结论：

①$a_1a_2\cdots a_n<1$；

②当$n=1$时，$v<3\ln10$；

③当$n=2$时，若$v=12\ln2$，则$\sqrt{a_1a_2}\geqslant6$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=CC_1=2$，D 为 AB 中点.

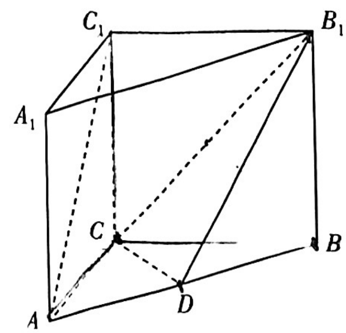
（Ⅰ）求证：AC_1 // 平面 B_1CD；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $B-B_1C-D$ 的余弦值.

条件①：$BC\perp AC_1$；

条件②：$B_1D=\sqrt{6}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



17.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\sin^2\omega x+\dfrac{1}{2}(\omega>0)$.

（Ⅰ）若 $\omega=2$，求 $f(\dfrac{\pi}{6})$ 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$f(-\dfrac{\pi}{12})=0$，求 ω 的值.

18.（本小题 13 分）

某医学小组为了比较白鼠注射 A,B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积，选 20 只健康白鼠做试验. 将这 20 只白鼠随机分成两组，每组 10 只，其中第 1 组注射药物 A，第 2 组注射药物 B. 试验结果如下表所示.

疱疹面积（单位：mm^2）	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$
第 1 组（只）	3	4	1	2	0
第 2 组（只）	1	3	2	3	1

（Ⅰ）现分别从第 1 组，第 2 组的白鼠中各随机选取 1 只，求被选出的 2 只白鼠皮肤疱疹面积均小于 $60mm^2$ 的概率；

（Ⅱ）从两组皮肤疱疹面积在 $[60,80)$ 区间内的白鼠中随机选取 3 只抽血化验，求第 2 组中被抽中白鼠只数 X 的分布列和数学期望 EX；

（Ⅲ）用“$\xi_k=0$”表示第 k 组白鼠注射药物后皮肤疱疹面积在 $[30,50)$ 区间内，“$\xi_k=1$”表示第 k 组白鼠注射药物后皮肤疱疹面积在 $[50,80)$ 区间内（$k=1,2$），写出方差 $D\xi_1,D\xi_2$ 的大小关系.（结论不要求证明）

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $4\sqrt{2}$，以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形的周长为 16.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）过点 $S(0,1)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 P,Q 两点，线段 PQ 的中点为 M. 是否存在定点 D，使得 $\frac{|DM|}{|PQ|}=\frac{1}{2}$？若存在，求出 D 的坐标；若不存在，请说明理由.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x+\ln(x+1)-x$，曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线为 l: $y=g(x)$，记 $h(x)=f(x)-g(x)$.

（Ⅰ）当 $x_0=0$ 时，求切线 l 的方程；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，求函数 $h(x)$ 的零点并证明 $xh(x)\geqslant 0$；

（Ⅲ）当 $x_0\neq 0$ 时，直接写出函数 $h(x)$ 的零点个数.（结论不要求证明）

21.（本小题 15 分）

已知集合 $M_n=\{x\in \mathbf{N}^*|x\leqslant 2n\}(n\in \mathbf{N}, n\geqslant 4)$，若存在数阵 $T=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ 满足：

①$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\cup\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}=M_n$；

②$a_k-b_k=k(k=1,2,\cdots,n)$.

则称集合 M_n 为“好集合”，并称数阵 T 为 M_n 的一个“好数阵”.

（Ⅰ）已知数阵 $T=\begin{bmatrix} x & y & z & 6 \\ 7 & w & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是 M_4 的一个“好数阵”，试写出 x, y, z, w 的值；

（Ⅱ）若集合 M_n 为“好集合”，证明：集合 M_n 的“好数阵”必有偶数个；

（Ⅲ）判断 $M_n(n=5,6)$ 是否为“好集合”. 若是，求出满足条件 $n\in\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的所有“好数阵”；若不是，说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）