通州区 2024—2025 学年第一学期高三年级期中质量检测

数学试卷

2024 年 11 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知集合 $A=\{x|-3<x<3\}$，集合 $B=\{x|x+1\geqslant 0\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{x|-1\leqslant x<3\}$　(B) $\{x|-3<x\leqslant -1\}$　(C) $\{x|x\geqslant -1\}$　(D) $\{x|x>-3\}$

(2)设复数 $z=3-\mathrm{i}$，则复数 $\frac{z}{\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点的坐标是

(A) $(1,3)$　(B) $(-1,3)$　(C) $(-1,-3)$　(D) $(-3,-1)$

(3)下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $f(x)=\sqrt{x+1}$　(B) $f(x)=2^{-x}$　(C) $f(x)=-\ln x$　(D) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

(4)已知角 α 终边经过点 $P(-3,y)$，且 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\cos\alpha=$

(A) $-\frac{3}{5}$　(B) $\pm\frac{3}{5}$　(C) $-\frac{4}{5}$　(D) $\pm\frac{4}{5}$

(5)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”的

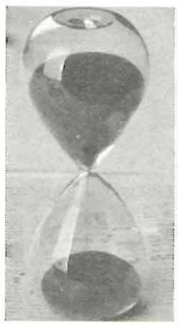
(A)充分而不必要条件　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　(D)既不充分也不必要条件

(6)在△ABC 中，$A=\frac{\pi}{4}$，$C=\frac{7\pi}{12}$，$b=\sqrt{2}$，则 $c=$

(A) $\sqrt{3}-1$　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $\sqrt{3}+1$

(7)沙漏也叫做沙钟，是一种测量时间的装置. 现有一个沙漏（如图）上方装有 $a\ \mathrm{cm}^3$ 的细沙，细沙从中间小孔由上方慢慢漏下，经过 t min 时剩余的细沙量为 $y\ \mathrm{cm}^3$，且 $y=a\cdot \mathrm{e}^{-bt}$（$b$ 为常数），经过 8 min 时，上方还剩下一半细沙，要使上方细沙是开始时的 $\frac{1}{8}$，需经过的时间为



(A) 8 min　(B) 16 min　(C) 24 min　(D) 26 min

(8)设函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，已知 $f(x_0)=-1$，$f(x_0+\frac{\pi}{2})=1$，则 ω 的最小值为

(A)1　　　　(B)2　　　　(C)3　　　　(D)4

(9)设集合 $A=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 1,a^2x+y>3,x-ay\leqslant 2\}$，则

(A)对任意实数 a，$(2,1)\in A$　　　　(B)对任意实数 a，$(2,1)\notin A$

(C)当且仅当 $a>1$ 时，$(2,1)\in A$　　　　(D)当且仅当 $a<0$ 时，$(2,1)\notin A$

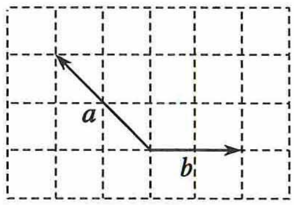
(10)已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，过点 G 作一条直线与边 AB，AC 分别交于点 E，F(点 E，F 与所在边的端点均不重合)，设 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AF}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是

(A)1　　　　(B)$\frac{4}{3}$　　　　(C)2　　　　(D)4

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)函数 $y=\ln x+\frac{1}{x-1}$ 的定义域是________.



(12)已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示. 若网格中每个小正方形的边长均为 1，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$________.

(13)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4，设其前 n 项和为 S_n，且 $S_2=10$，则过点 $P(n,a_n)$ 和 $Q(n+2,a_{n+2})(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 1)$ 的直线的斜率是________.

(14)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a,x<1,\\4(x-a)(x-2a),x\geqslant 1.\end{cases}$

①若 $a=1$，则函数 $f(x)$ 的零点个数有________个.

②若函数 $f(x)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是________.

(15)已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n-a_n^3$，给出下列四个结论：

①$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$；　　　　②数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列；

③$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n=0$；　　　　④$\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n^2\leqslant\frac{1}{2n+2}$.

其中正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x$，$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值；

（Ⅱ）直线 $x=t(t\in[0,\frac{\pi}{2}])$ 与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象分别交于 M、N 两点，求 $|MN|$ 的最大值.

(17)（本小题 13 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a^2+b^2-c^2=-ab$，$b\sin C=2\sqrt{3}\sin B$.

（Ⅰ）求 $\angle C$ 及 c；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$b=4$；

条件②：$b\sin C=\sqrt{3}$；

条件③：$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别作答，按第一个解答计分.

(18)（本小题 13 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $S_n=2a_n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $b_1=a_1$，$b_2+b_4=6$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $c_n=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数},\\ b_n, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

(19)(本小题 15 分)

设函数 $f(x)=x^3-3ax+b$,若函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值 8.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值和最小值,以及相应 x 的值;

(Ⅲ)证明:曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=(2x-a)\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)当 $a=0$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)证明:当 $a=-1$,曲线 $y=f(x)$ 的切线不经过点 $(0,0)$;

(Ⅲ)当 $a>0$ 时,若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有两个不同的交点,求实数 a 的取值范围.

(21)(本小题 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=[n\sqrt{2}]$($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数),数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)写出数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项;

(Ⅱ)试判断 b_6 与 b_7 是否为数列 $\{a_n\}$ 中的项,并说明理由;

(Ⅲ)证明:数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 的公共项有无数多个.