丰台区 2023～2024 学年度第一学期期末练习

高 三 数学

2024.01

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分　选择题（共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$， $A=\{-1,0,1\}$， $B=\{1,2\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

（A） $\{-3,-2\}$　　（B） $\{-3,-2,1,2\}$

（C） $\{-3,-2,-1,0,1\}$　　（D） $\{-3,-2,-1,0,2\}$

2．若 $\bar{z}(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$，则 $|z|=$

（A） i　　（B） 1

（C） $\sqrt{2}$　　（D） 2

3．在 $(x-2y)^6$ 的展开式中， x^4y^2 的系数为

（A） -120　　（B） 120

（C） -60　　（D） 60

4．在中国文化中，竹子被用来象征高洁、坚韧、不屈的品质．竹子在中国的历史可以追溯到远古时代，早在新石器时代晚期，人类就已经开始使用竹子了．竹子可以用来加工成日用品，比如竹筒、竹签、竹扇、竹筐、竹筒等．现有某饮料厂共研发了九种容积不同的竹筒用来罐装饮料，这九种竹筒的容积 $a_1,a_2,\cdots,a_9$（单位：L）依次成等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=3$， $a_8=0.4$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_9$

（A）5.4　　（B）6.3

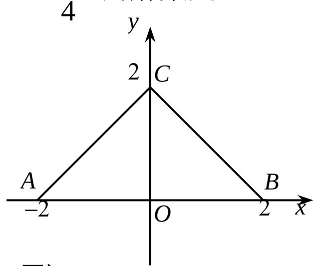
（C）7.2　　（D）13.5

5．已知直线 $y=kx+\sqrt{3}$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则 $k=$

（A） ±1　　（B） $\pm\sqrt{2}$

（C） $\pm\sqrt{3}$　　（D） ±2

6．如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB，则不等式 $f(x)>\tan\frac{\pi}{4}x$ 的解集是



（A） $\{x\mid-2<x<0\}$

（B） $\{x\mid0<x<1\}$

（C） $\{x\mid-2<x<1\}$

（D）$\{x\,|\,-1<x<2\}$

7．在某次数学探究活动中，小明先将一副三角板按照图1的方式进行拼接，然后他又将三角板 ABC 折起，使得二面角 $A-BC-D$ 为直二面角，得图 2 所示四面体 $ABCD$．小明对四面体 $ABCD$ 中的直线、平面的位置关系作出了如下的判断：① $CD\perp$ 平面 ABC；② $AB\perp$ 平面 ACD；③平面 $ABD\perp$ 平面 ACD；④平面 $ABD\perp$ 平面 BCD．其中判断正确的个数是

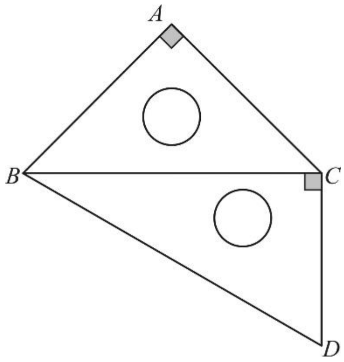


图 1

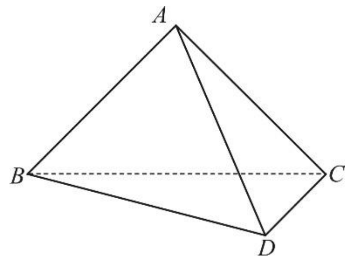


图 2

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

8．已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的单位向量，向量 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$（$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$）．“$\lambda>0$，且 $\mu>0$”是“$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})>0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9．在八张亚运会纪念卡中，四张印有吉祥物宸宸，另外四张印有莲莲．现将这八张纪念卡平均分配给 4 个人，则不同的分配方案种数为

（A）18　　（B）19

（C）31　　（D）37

10．已知函数 $f(x)=|x^2+a|+2|x|$，当 $x\in[-2,2]$时，记函数 $f(x)$ 的最大值为 $M(a)$，则 $M(a)$ 的最小值为

（A）3.5　　（B）4

（C）4.5　　（D）5

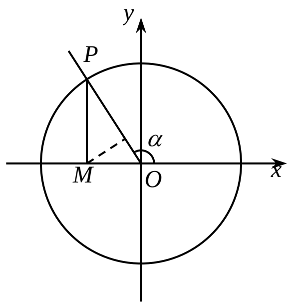
第二部分　非选择题（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为___.

12．已知 $f(x)=4^x-4^{-x}$，则 $f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=$___.

13．矩形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $BC=1$ ，且 E,F 分为 BC,CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=$___.



14．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，角 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 的始边为 x 轴的非负半轴，终边与单位圆 O 交于点 P ，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M . 若记点 M 到直线 OP 的距离为 $f(\alpha)$ ，则 $f(\alpha)$ 的极大值点为___，最大值为___.

15．在平面直角坐标系内，动点 M 与定点 $F(0,1)$ 的距离和 M 到定直线 $l:y=3$ 的距离的和为 4．记动点 M 的轨迹为曲线 W ，给出下列四个结论：

①曲线 W 过原点；

②曲线 W 是轴对称图形，也是中心对称图形；

③曲线 W 恰好经过 4 个整点（横、纵坐标均为整数的点）；

④曲线 W 围成区域的面积大于 $8\sqrt{3}$.

则所有正确结论的序号是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

在△ ABC 中， $a=\sqrt{3}c$ ， $A=\frac{2\pi}{3}$.

（Ⅰ）求 C 的大小；

（Ⅱ）在下列三个条件中选择一个作为已知，使△ ABC 存在且唯一确定，并求出 AC 边上的中线的长度.

条件①： $a=2b$ ；条件②：△ ABC 的周长为 $4+2\sqrt{3}$ ；条件③：△ ABC 的面积为 $\sqrt{3}$.

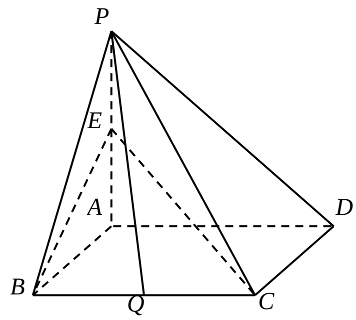
注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 14 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形， $PA\perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD=PA$ ，点 E 为 PA 中点.

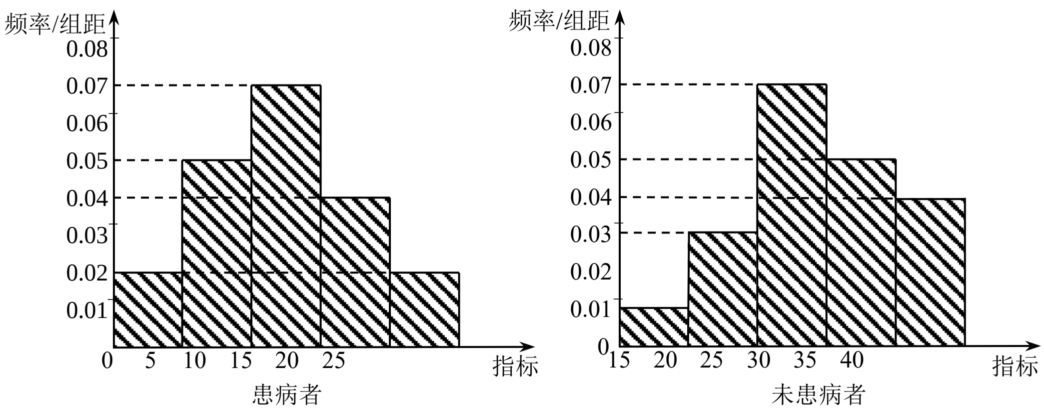
（Ⅰ）求证： AD //平面 BCE ；

（Ⅱ）点 Q 为棱 BC 上一点，直线 PQ 与平面 BCE 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{15}$，求 $\frac{BQ}{BC}$ 的值．



18．（本小题 13 分）

2023 年冬，甲型流感病毒来势汹汹．某科研小组经过研究发现，患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异．在某地的两类人群中各随机抽取 20 人的该项医学指标作为样本，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 a，将该指标小于 a 的人判定为阳性，大于或等于 a 的人判定为阴性．此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(a)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(a)$．假设数据在组内均匀分布，用频率估计概率．

（Ⅰ）当临界值 $a=20$ 时，求漏诊率 $p(a)$ 和误诊率 $q(a)$；

（Ⅱ）从指标在区间 $[20,25]$ 样本中随机抽取 2 人，记随机变量 X 为未患病者的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）在该地患病者占全部人口的 5%的情况下，记 $f(a)$ 为该地诊断结果不符合真实情况的概率．当 $a\in[20,25]$ 时，直接写出使得 $f(a)$ 取最小值时的 a 的值．

19．（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2-ax-a)$．

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴，求实数 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间．

20．（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（Ⅰ）求椭圆 E 的离心率和焦点坐标；

（Ⅱ）设直线 $l_1: y=kx+m$ 与椭圆 E 相切于第一象限内的点 P，不过原点 O 且平行于 l_1 的直线 l_2 与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，点 A 关于原点 O 的对称点为 C．

记直线 OP 的斜率为 k_1，直线 BC 的斜率为 k_2，求 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 的值．

21．（本小题 15 分）

对于数列 $\{a_n\}$，如果存在正整数 T，使得对任意 $n(n\in\mathbf{N}^*)$，都有 $a_{n+T}=a_n$，那么数列 $\{a_n\}$ 就叫做周期数列，T 叫做这个数列的周期．若周期数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足：存在正整数 k，对每一个 $i(i\leqslant k, i\in\mathbf{N}^*)$，都有 $b_i=c_i$，我们称数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为“同根数列”．

（Ⅰ）判断下列数列是否为周期数列．如果是，写出该数列的周期，如果不是，说明理由；

① $a_n=\sin n\pi$；② $b_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 3, & n=2,\\ b_{n-1}-b_{n-2}, & n\geqslant 3.\end{cases}$

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是“同根数列”，且周期的最小值分别是 3 和 5，求证：$k\leqslant 6$；

（Ⅲ）若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是“同根数列”，且周期的最小值分别是 $m+2$ 和 $m+4$ $(m\in\mathbf{N}^*)$，求 k 的最大值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）