海淀区高二年级练习

数学参考答案

2024.01

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　　（2）A　　（3）C　　（4）B　　（5）C

（6）B　　（7）D　　（8）C　　（9）D　　（10）A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11）$y=2x$ 或 $y=-2x$　　（12）异面

（13）$2x-y+1=0$　　（14）2268

（15）①③④　（答案中若含有②，0 分；①③④中只含一个，2 分；①③④中只含两个 3 分；①③④，4 分）

三、解答题（本大题共 4 小题，共 40 分）

（16）（本小题 10 分）

解:（Ⅰ）$C(2,0)$，　——————————2 分

$r=2$；　——————————4 分

（Ⅱ）圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|6-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$，——————————7 分

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$. ——————————10 分

（17）（本小题 10 分）

解:（Ⅰ）由题设可得 $\dfrac{p}{2}=1$，即 $p=2$，——————————2 分

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. ——————————3 分

（Ⅱ）由已知可得 $l':y=kx+6$，——————————4 分

由 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=kx+6 \end{cases}$ 消 y 得 $x^2-4kx-24=0$，——————————5 分

设 l' 与 C 交于两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=4k,x_1x_2=-24$，——————————7 分

$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$ ---------------------8 分

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(4k)^2-4\times(-24)]}$

$=4\sqrt{(1+k^2)(k^2+6)}$ --9 分

由 $|MN|=24$ 化简整理得 $k^4+7k^2-30=0$，

解得 $k^2=3, k^2=-10$（舍）

所以 $k=\pm\sqrt{3}$． --10 分

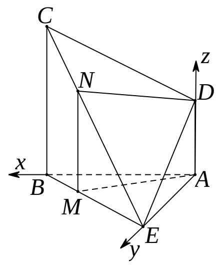
（18）（本小题 10 分）

解:（Ⅰ）因为 $AD//BC$， $AD\not\subset$ 平面 BCE， $BC\subset$ 平面 BCE

所以 $AD//$ 平面 BCE． --------------------------2 分

因为过 AD 的平面分别与棱 EB,EC 交于点 M,N，

所以 $AD//MN$． --------------------------------4 分



（Ⅱ）因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，

$AB\subset$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE\perp AB$， $AE\perp AD$．

又因为 $AB\perp AD$．

如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$， --------------------------------5 分

则 $B(2,0,0), C(2,0,2), E(0,2,0), D(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{ED}=(0,-2,1), \overrightarrow{EC}=(2,-2,2)$， $\overrightarrow{BE}=(-2,2,0), \overrightarrow{AD}=(0,0,1)$ --------6 分

设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BE}$， $\lambda\in[0,1]$．

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=(2,0,0)+\lambda(-2,2,0)=(2-2\lambda,2\lambda,0)$

设平面 AND 即平面 $AMND$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z=0,\\ (2-2\lambda)x+2\lambda y=0,\end{cases}$

令 $x=\lambda$，则 $y=\lambda-1$，于是 $\boldsymbol{m}=(\lambda,\lambda-1,0)$． ------------------------7 分

设平面 END 即平面 ECD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y'+z'=0,\\ 2x'-2y'+2z'=0,\end{cases}$

令 $y'=1$，则 $z'=2, x'=-1$，于是 $\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$． ------------------------8 分

所以，$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{2(\lambda-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}}$ --9 分

所以，$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{6}]$．

由 $\boldsymbol{m}=(\lambda,\lambda-1,0)$， $\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$ 的方向判断可得 $\theta=\pi-<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>$，

所以，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\cos\theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. -------------------------10 分

（19）（本小题 10 分）

解：（I）由题设，$\begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ --2 分

解得 $c=1$， --3 分

$b^2=3$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. --4 分

（II）由题意得，直线 PA 为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$， ---------------------------5 分

代入 $x=t$，得 $y_C=\frac{(t+2)y_0}{x_0+2}$.

因为直线 PB 为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

同理可得 $D\left(t,\frac{(t-2)y_0}{x_0-2}\right)$. --------6 分

由 $CH\perp PB$ 得直线 CH：

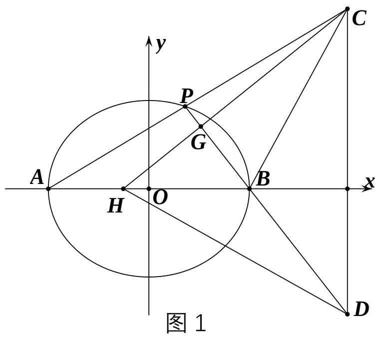


图 1

$$y-\frac{(t+2)y_0}{x_0+2}=\frac{2-x_0}{y_0}(x-t)，$$ ------------------7 分

代入 $y=0$，得 $x_H=t+\frac{(t+2){y_0}^2}{{x_0}^2-4}$， -----------------------------------8 分

由 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 E 上，得 $\frac{{x_0}^2}{4}+\frac{{y_0}^2}{3}=1$，整理得 ${y_0}^2=\frac{3(4-{x_0}^2)}{4}$， ---9 分

所以 $x_H=t-\frac{3}{4}(t+2)=\frac{t-6}{4}$，从而可得 $H\left(\frac{t-6}{4},0\right)$.

所以$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}=\left(\frac{3t+6}{4},\frac{(t+2)y_0}{x_0+2}\right)\cdot\left(\frac{3t+6}{4},\frac{(t-2)y_0}{x_0-2}\right)=\frac{(3t+6)^2}{16}+\frac{(t^2-4){y_0}^2}{{x_0}^2-4}$

$$=\frac{(3t+6)^2}{16}-\frac{3(t^2-4)}{4}=-\frac{3(t-6)^2}{16}+12.$$

综上，存在$t=6$，使得$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}$有最大值 12. ----------------------10 分

备注：

以上评分标准供大家评阅试卷参考，与评标不同的解法可以按评标采分点相对应给分。