

石景山区 2023—2024 学年第一学期高二期末试卷

数 学

本试卷共 6 页，满分为 100 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若直线 l 的倾斜角为 60° ，则直线 l 的斜率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

2. 直线 $y = 2x + 1$ 关于 x 轴对称的直线方程为（ ）

- A. $y = -2x + 1$ B. $y = -2x - 1$ C. $y = \frac{1}{2}x - 1$ D. $y = \frac{1}{2}x + 1$

3. 已知 α ， β 是两个不同平面， $l \subset \alpha$ ，则“ $\alpha \parallel \beta$ ”是“ $l \parallel \beta$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率是 2，则 $b =$ （ ）

- A. 12 B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 用 0, 1, 2, 3, 4 可以组成无重复数字的两位数的个数为（ ）

- A. 25 B. 20 C. 16 D. 15

6. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 点 $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 2, -1)$, 则 ()

- A. 直线 $AB \parallel$ 坐标平面 xOy B. 直线 $AB \perp$ 坐标平面 xOy
 C. 直线 $AB \parallel$ 坐标平面 xOz D. 直线 $AB \perp$ 坐标平面 xOz

7. 已知直线 $l_1: x+3y-7=0$, 直线 $l_2: kx-y-2=0$. 若 $l_1 \perp l_2$, 则实数 $k =$ ()

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3

8. 棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是 BC_1 中点, 则异面直线 PD 与 A_1B 所成角的余弦值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

9. P 为直线 $y=kx-2$ 上一点, 过 P 总能作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线, 则 k 的最小值 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\sqrt{3}$

10. 庑殿 (图1) 是中国古代传统建筑中的一种屋顶形式, 多用于宫殿、坛庙、重要门楼等高级建筑上, 庑殿的基本结构包括四个坡面, 坡面相交处形成5根屋脊, 故又称“四阿殿”或“五脊殿”. 图2是根据庑殿顶构造的多面体模型, 底面 $ABCD$ 是矩形, 且四个侧面与底面的夹角均相等, 则 ().



图1

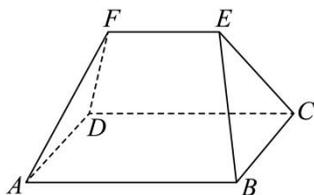


图2

- A. $AB = BC + EF$ B. $AB = \frac{BC}{2} + EF$
 C. $AB = BC + \frac{EF}{2}$ D. $AB = 2BC - EF$

第二部分（非选择题 共 60 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11. $(2-x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

12. 直线 $l_1: 2x-y+1=0$ 与直线 $l_2: 2x-y-1=0$ 之间的距离为_____.

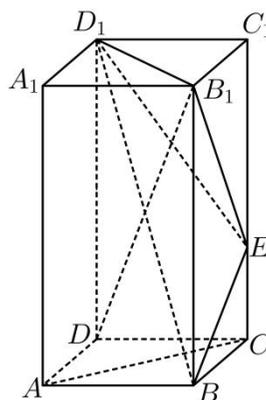
13. 已知圆 $x^2 + y^2 + 2x - ay - 4 = 0$ 的半径为 3，则 a 的值为_____.

14. 方程 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$ 表示的曲线是_____，其标准方程是_____.

15. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2$ ， $AA_1 = 4$ ， E 为棱 CC_1 上的一个动点，给出下列四个结论：

- ① $A_1B_1 \perp BE$ ；
- ② 三棱锥 $E - B_1BD_1$ 的体积为定值；
- ③ 存在点 E ，使得 $AC \parallel$ 平面 BD_1E ；
- ④ 存在点 E ，使得 $B_1D \perp$ 平面 BD_1E .

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题共 5 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题满分 8 分)

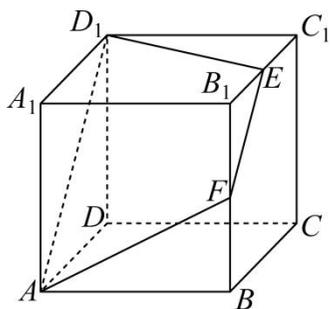
菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 的坐标分别为 $A(-4,7), C(6,-5)$ ， BC 边所在直线过点 $P(4,-1)$ 。

(I) 求 BC, AD 边所在直线的方程；

(II) 求对角线 BD 所在直线的方程。

17. (本小题满分 8 分)

如图正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E 是棱 B_1C_1 的中点，过 A, D_1, E 的平面与棱 BB_1 相交于点 F 。



(I) 求证： F 是 BB_1 的中点；

(II) 求点 D 到平面 AD_1E 的距离。

18. (本小题满分 8 分)

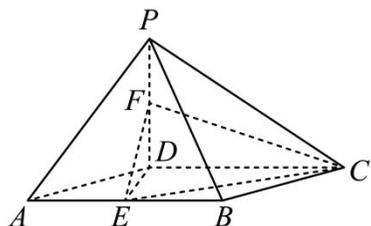
已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 其准线方程为 $x = -1$.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 直线 $l: y = x - 1$ 与抛物线 C 交于不同的两点 A, B , 求以线段 AB 为直径的圆的方程.

19. (本小题满分 8 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为菱形, E, F 分别为 AB, PD 的中点.



(I) 求证: $EF \parallel$ 平面 PBC ;

(II) 若 $AD = 2\sqrt{3}$, $PD = 4$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知. 求二面角 $E-FC-D$ 的大小.

条件①: $PB = PC$;

条件②: $DE \perp PC$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

20. (本小题满分 8 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(\sqrt{6}, 0)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) F 为椭圆 C 的右焦点, P 为直线 $x = 3$ 上一点, 过点 F 作 PF 的垂线交椭圆 C 于

M, N 两点, 连接 OP 与 MN 交于点 H (O 为坐标原点). 求 $\frac{|MH|}{|HN|}$ 的值.

石景山区 2023—2024 学年第一学期高二期末

数学试卷答案及评分参考

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	B	C	C	D	A	D	A

二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分。

题号	11	12	13	14	15
答案	-8	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	± 4	椭圆, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$	①②③

三、解答题：本大题共 5 个小题，共 40 分。解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 8 分)

解：(I) 由菱形的性质可知 $BC \parallel AD$ ，则 $k_{AD} = k_{BC} = k_{CP} = \frac{-1+5}{4-6} = -2$ 。

所以，BC 边所在直线的方程为 $y+5 = -2(x-6)$ ，即 $2x+y-7=0$ ；

AD 边所在直线的方程为 $y-7 = -2(x+4)$ ，即 $2x+y+1=0$ 。……………4 分

(II) 线段 AC 的中点为 $E(1,1)$ ， $k_{AC} = \frac{7+5}{-4-6} = -\frac{6}{5}$ ，

由菱形的几何性质可知， $BD \perp AC$ 且 E 为 BD 的中点，则 $k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}} = \frac{5}{6}$ ，

所以，对角线 BD 所在直线的方程为 $y-1 = \frac{5}{6}(x-1)$ ，即 $5x-6y+1=0$ 。……………8 分

17. (本小题满分 8 分)

证明：(I) 连接 BC_1 。

因为平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ，

平面 $AD_1EF \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = AD_1$ ，

平面 $AD_1EF \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = EF$ ，

所以 $AD_1 \parallel EF$ 。

又 $AB = C_1D_1, AB \parallel C_1D_1$ ，所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，

所以 $AD_1 \parallel BC_1$, 故 $EF \parallel BC_1$.

又 E 是棱 B_1C_1 的中点, 所以 F 是 BB_1 的中点.

.....4 分

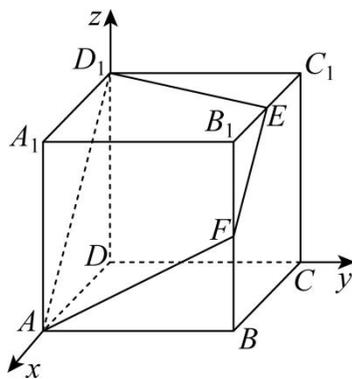
(II) 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $D(0,0,0), A(2,0,0), D_1(0,0,2), E(1,2,2)$,

设平面 AD_1E 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AD_1} = (x, y, z) \cdot (-2, 0, 2) = -2x + 2z = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AE} = (x, y, z) \cdot (-1, 2, 2) = -x + 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

令 $x=1$, 得 $z=1, y=-\frac{1}{2}$, 故 $m = (1, -\frac{1}{2}, 1)$,



$$\text{点 } D \text{ 到平面 } AD_1E \text{ 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{DA} \cdot m|}{|m|} = \frac{|(2,0,0) \cdot (1, -\frac{1}{2}, 1)|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \text{.....8 分}$$

18. (本小题满分 8 分)

解: (I) 由题意知 $-\frac{p}{2} = -1$, 所以 $p = 2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

.....3 分

(II) 联立 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x - 1 \end{cases}$, 得 $y^2 - 4y - 4 = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 $D(x_0, y_0)$.

则 $y_1 + y_2 = 4, y_1 y_2 = -4$. 所以 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2, x_0 = y_0 + 1 = 3$.

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]} = 8$$

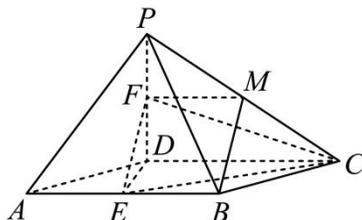
所以以线段 AB 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$.

.....8 分

19. (本小题满分 8 分)

(I) 取 PC 中点 M , 连接 FM, BM .

在 $\triangle PCD$ 中, M, F 分别为 PC, PD 的中点, 所以



$$MF \parallel DC, MF = \frac{1}{2}DC.$$

在菱形 $ABCD$ 中, 因为 $AB \parallel DC, BE = \frac{1}{2}DC$,

所以 $BE \parallel MF, BE = MF$.

所以四边形 $BEMF$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel BM$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 $PBC, BM \subset$ 平面 PBC ,

所以 $EF \parallel$ 平面 PBC .

.....4 分

(II) 选择条件①:

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, DB, DC, DE \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp DB, PD \perp DC, PD \perp DE$.

连接 BD , 因为 $PB^2 = PD^2 + BD^2, PC^2 = PD^2 + DC^2$, 且 $PB = PC$,

所以 $BD = DC$, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BD = AD$, 即 $\triangle ADB$ 为正三角形.

又因为 E 为 AB 中点, 所以 $DE \perp DC$,

以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

又因为 $AB \parallel DC, DE \perp AB$.

因为 $\triangle ADB$ 为正三角形且 $AD = 2\sqrt{3}$, 所以 $DE = 3$.

则 $F(0, 0, 2), E(3, 0, 0), C(0, 2\sqrt{3}, 0)$,

则 $\overrightarrow{EF} = (-3, 0, 2), \overrightarrow{EC} = (-3, 2\sqrt{3}, 0)$,

根据条件, 可得平面 FCD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases},$$

取 $x = 2$, 则 $y = \sqrt{3}, z = 3$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (2, \sqrt{3}, 3)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}.$$

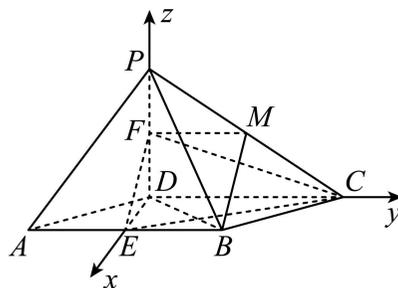
所以二面角 $E-FC-D$ 的大小为 60° .

.....8 分

选择条件②:

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, DE, DC \subset$ 平面 $ABCD$,

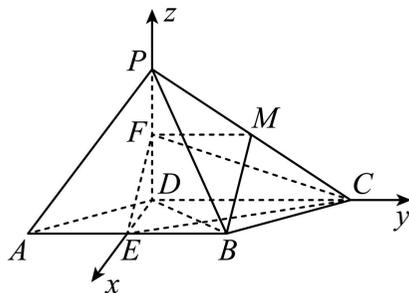
所以 $PD \perp DE, PD \perp DC$.



又因为 $DE \perp PC, PD \cap PC = P, PD, PC \subset$ 平面 PCD ,
 所以 $DE \perp$ 平面 PCD , 又 $DC \subset$ 平面 PCD ,
 所以 $DE \perp DC$,

以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

连接 BD , 因为 $AB \parallel DC$, 所以 $DE \perp AB$, 又 E 为
 AB 中点, 所以 $AD = DB$,
 所以 $\triangle ADB$ 为正三角形. 因为 $AD = 2\sqrt{3}$, 所以
 $DE = 3$.



则 $F(0,0,2), E(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0)$,

则 $\overrightarrow{EF} = (-3,0,2), \overrightarrow{EC} = (-3,2\sqrt{3},0)$,

根据条件, 可得平面 FCD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1,0,0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x,y,z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases},$$

取 $x = 2$, 则 $y = \sqrt{3}, z = 3$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (2, \sqrt{3}, 3)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}.$$

所以二面角 $E-FC-D$ 的大小为 60° .

20. (本小题满分 8 分)

解: (I) 由题意可得
$$\begin{cases} a = \sqrt{6} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} c = 2 \\ b = \sqrt{2} \\ a = \sqrt{6} \end{cases},$$

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$3 分

(II) 设 $P(3,m)$, $F(2,0)$ 则直线 PF 的斜率为 $k_{PF} = \frac{m-0}{3-2} = m$,

(i) 当 $m = 0$ 时, 则直线 l 与 x 轴垂直, 点 H 即为点 F , 则 $\frac{|MH|}{|HN|} = 1$;

(ii) 当 $m \neq 0$ 时, 则直线 l 的斜率为 $k_l = -\frac{1}{m}$, 则直线 l 的方程 $y = -\frac{1}{m}(x-2)$,

联立方程 $\begin{cases} y = -\frac{1}{m}(x-2) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 消去 y 得: $(m^2+3)x^2 - 12x + 12 - 6m^2 = 0$, 显然 $\Delta > 0$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{12}{m^2+3}, x_1 x_2 = \frac{12-6m^2}{m^2+3}$.

\because 直线 OP 的方程为 $y = \frac{m}{3}x$, 联立方程 $\begin{cases} y = -\frac{1}{m}(x-2) \\ y = \frac{m}{3}x \end{cases}$, 解得 $x_H = \frac{6}{m^2+3}$,

因为 $x_H = \frac{x_1+x_2}{2}$, 所以点 H 为线段 MN 的中点, 则 $\frac{|MH|}{|HN|} = 1$;

综上所述: $\frac{|MH|}{|HN|} = 1$.

.....8 分

(以上解答题, 若用其它方法, 请酌情给分)