石景山区2023—2024学年第一学期高二期末

数学试卷答案及评分参考

一、选择题：本大题共10个小题，每小题4分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	B	C	C	D	A	D	A

二、填空题：本大题共5个小题，每小题4分，共20分.

题号	11	12	13	14	15
答案	-8	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	± 4	椭圆，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	①②③

三、解答题：本大题共5个小题，共40分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16．(本小题满分8分)

解：（Ⅰ）由菱形的性质可知$BC \parallel AD$，则$k_{AD}=k_{BC}=k_{CP}=\frac{-1+5}{4-6}=-2$.

所以，BC边所在直线的方程为$y+5=-2(x-6)$，即$2x+y-7=0$；

AD边所在直线的方程为$y-7=-2(x+4)$，即$2x+y+1=0$. …………4分

（Ⅱ）线段AC的中点为$E(1,1)$，$k_{AC}=\frac{7+5}{-4-6}=-\frac{6}{5}$，

由菱形的几何性质可知，$BD\perp AC$且E为BD的中点，则$k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}=\frac{5}{6}$，

所以，对角线BD所在直线的方程为$y-1=\frac{5}{6}(x-1)$，即$5x-6y+1=0$. …………8分

17．(本小题满分8分)

证明：（Ⅰ）连接BC_1.

因为平面$ADD_1A_1 \parallel$平面BCC_1B_1，

平面$AD_1EF\cap$平面$ADD_1A_1=AD_1$，

平面$AD_1EF\cap$平面$BCC_1B_1=EF$，

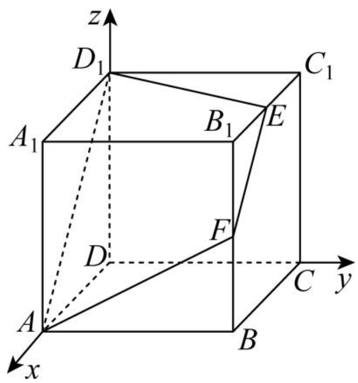
所以$AD_1 \parallel EF$.

又$AB=C_1D_1, AB\parallel C_1D_1$，所以四边形$ABC_1D_1$为平行四边形，

所以 $AD_1 // BC_1$，故 $EF // BC_1$.

又 E 是棱 B_1C_1 的中点，所以 F 是 BB_1 的中点. …………4 分

（Ⅱ）以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0),A(2,0,0),D_1(0,0,2),E(1,2,2)$，

设平面 AD_1E 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=(x,y,z)\cdot(-2,0,2)=-2x+2z=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=(x,y,z)\cdot(-1,2,2)=-x+2y+2z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，得 $z=1,y=-\dfrac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{m}=(1,-\dfrac{1}{2},1)$，

点 D 到平面 AD_1E 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|(2,0,0)\cdot(1,-\frac{1}{2},1)|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$.…………8 分

18．(本小题满分 8 分)

解：（Ⅰ）由题意知 $-\dfrac{p}{2}=-1$，所以 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. …………3 分

（Ⅱ）联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x-1\end{cases}$ 得 $y^2-4y-4=0$.

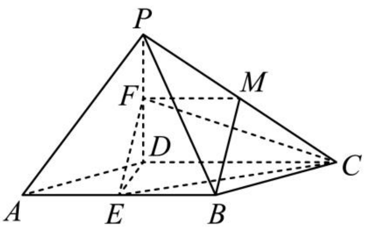
设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点为 $D(x_0,y_0)$.

则 $y_1+y_2=4,y_1y_2=-4$.所以 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$, $x_0=y_0+1=3$.

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=8$

所以以线段 AB 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$. …………8 分

19．(本小题满分 8 分)



（Ⅰ）取 PC 中点 M，连接 FM,BM .

在 $\triangle PCD$ 中，M,F 分别为 PC,PD 的中点，所以

$MF // DC, MF = \frac{1}{2}DC$.

在菱形 $ABCD$ 中，因为 $AB // DC, BE = \frac{1}{2}DC$ ，

所以 $BE // MF, BE = MF$.

所以四边形 $BEMF$ 为平行四边形，所以 $EF // BM$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 $PBC, BM \subset$ 平面 PBC ，

所以 $EF //$ 平面 PBC . …………4 分

（II）选择条件①：

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, DB, DC, DE \subset$ 平面 $ABCD$ ，

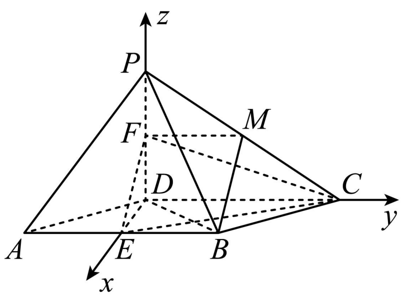
所以 $PD \perp DB, PD \perp DC, PD \perp DE$.

连接 BD ，因为 $PB^2 = PD^2 + BD^2, PC^2 = PD^2 + DC^2$ ，且 $PB = PC$ ，

所以 $BD = DC$ ，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = BD = AD$ ，即 $\triangle ADB$ 为正三角形.

又因为 E 为 AB 中点，所以 $DE \perp DC$ ，

以D为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



又因为 $AB // DC, DE \perp AB$.

因为 $\triangle ADB$ 为正三角形且 $AD = 2\sqrt{3}$ ，所以 $DE = 3$.

则 $F(0,0,2), E(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0)$ ，

则 $\overrightarrow{EF} = (-3,0,2), \overrightarrow{EC} = (-3,2\sqrt{3},0)$ ，

根据条件，可得平面 FCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (1,0,0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ ，

取 $x = 2$ ，则 $y = \sqrt{3}, z = 3$ ，所以 $\boldsymbol{n}_2 = (2,\sqrt{3},3)$ ，

所以 $\cos <\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2> = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$.

所以二面角 $E-FC-D$ 的大小为 60° . …………8 分

选择条件②：

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, DE, DC \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PD \perp DE, PD \perp DC$.

又因为$DE \perp PC, PD \cap PC = P, PD, PC \subset$平面$PCD$，

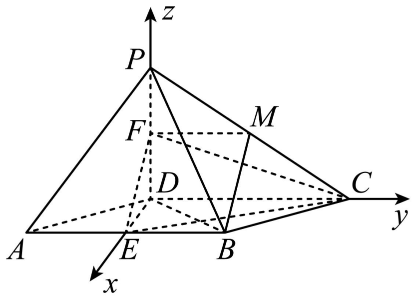
所以$DE \perp$平面PCD，又$DC \subset$平面PCD，

所以$DE \perp DC$，

以D为原点，建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$.

连接BD，因为$AB // DC$，所以$DE \perp AB$，又E为AB中点，所以$AD = DB$，

所以$\triangle ADB$为正三角形.因为$AD = 2\sqrt{3}$，所以$DE = 3$.



则$F(0,0,2), E(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0)$，

则$\overrightarrow{EF} = (-3,0,2), \overrightarrow{EC} = (-3,2\sqrt{3},0)$，

根据条件，可得平面FCD的法向量为$\boldsymbol{n}_1 = (1,0,0)$.

设平面EFC的法向量为$\boldsymbol{n}_2 = (x,y,z)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \end{cases}$，所以$\begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$，

取$x = 2$，则$y = \sqrt{3}, z = 3$，所以$\boldsymbol{n}_2 = (2,\sqrt{3},3)$，

所以$\cos < \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 > = \dfrac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \dfrac{2}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{2}$.

所以二面角$E-FC-D$的大小为60°.

20．(本小题满分 8 分)

解：（Ⅰ）由题意可得$\begin{cases} a = \sqrt{6} \\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} c = 2 \\ b = \sqrt{2} \\ a = \sqrt{6} \end{cases}$，

椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.　　　　…………3 分

（Ⅱ）设$P(3,m)$，$F(2,0)$则直线PF的斜率为$k_{PF} = \dfrac{m-0}{3-2} = m$，

（ⅰ）当$m = 0$时，则直线l与x轴垂直，点H即为点F，则$\dfrac{|MH|}{|HN|} = 1$；

（ⅱ）当$m \neq 0$时，则直线l的斜率为$k_l = -\dfrac{1}{m}$，则直线l的方程$y = -\dfrac{1}{m}(x-2)$，

联立方程$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{m}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去$y$得：$(m^2+3)x^2-12x+12-6m^2=0$，显然$\Delta>0$，

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{12}{m^2+3},x_1x_2=\dfrac{12-6m^2}{m^2+3}$.

∵直线OP的方程为$y=\dfrac{m}{3}x$，联立方程$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{m}(x-2) \\ y=\dfrac{m}{3}x \end{cases}$，解得$x_H=\dfrac{6}{m^2+3}$，

因为$x_H=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，所以点H为线段MN的中点，则$\dfrac{|MH|}{|HN|}=1$；

综上所述：$\dfrac{|MH|}{|HN|}=1$.　　…………8 分

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）