房山区2023-2024学年度第二学期学业水平调研（二）参考答案

高二年级 数学

一、选择题共10小题，每小题5分，共50分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	D	A	B	D	C	D	B

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）$\dfrac{1}{4}$　　（12）1；-8　　（13）20；0.3

（14）$\lambda=\dfrac{5}{2}$（答案不唯一，$\lambda\in(2,3)$即可）　　（15）②③④

（注：第（12）（13）题，前3后2；（15）题，有错选0分，否则给分3,4,5分）

三、解答题共6小题，共75分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题12分）（7+5）

（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$是的公比为q

则$d=a_3-a_2=2$，　　--------1分

所以$a_n=a_2+(n-2)d$

所以$a_n=2n-1$　　--------2分

因为$a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$　　--------1分

由$b_4=b_1q^3$得$q^3=27$，所以$q=3$．　　--------1分

所以$b_n=3^{n-1}$．　　--------2分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$，

因此$c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$

从而数列$\{c_n\}$的前n项和

$S_n=1+3+\cdots+(2n-1)+1+3+\cdots+3^{n-1}$

$=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}+\dfrac{1-3^n}{1-3}$　　--------4分

$=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$　．　　--------1分

（17）（本小题 12 分）（7+5）

（Ⅰ） $f'(x)=-3x^2+6x+9$， --------2 分

$$=-3(x^2-2x-3)=-3(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=3$. --------2 分

$f'(x)$，$f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘

--------1 分

所以 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点；$x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点. --------2 分

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 的极小值为 -10，即 $f(-1)=1+3-9+a=-10$ --------1 分

解得 $a=-5$， --------2 分

又 $f(-2)=-3$，　$f(2)=17$. --------1 分

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最大值 17. --------1 分

（18）（本小题 12 分）（2+5+5）

（Ⅰ）设第一次摸到白球的事件为 A，则

$P(A)=\frac{3}{5}$，即第一次摸到白球的概率为 $\frac{3}{5}$. --------2 分

（Ⅱ）设第二次摸到白球的事件为 B，则

$P(B)=P(BA+B\overline{A})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ --------1 分

$=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}$ --------2 分

$=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$ --------2 分 即第二次摸到白球的概率 $\frac{3}{5}$.

（Ⅲ）设两次摸到的小球颜色不同的事件为 C，则 $C=A\overline{B}+\overline{A}B$

$P(C)=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ --------1 分

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}$ --------2 分

$=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$ --------2 分 即两次摸到的小球颜色不同的概率为 $\frac{2}{5}$.

（19）（本小题 13 分）（3+8+2）

（Ⅰ）设从该地区的大学生随机抽取 1 人，此人选择“视频创作”的事件为 A，则

$P(A)=\dfrac{40}{120}=\dfrac{1}{3}$ -------3 分

（Ⅱ）因为抽取的 6 人中喜欢“视频创作”的人数为 $6\times\dfrac{40}{120}=2$， -------1 分

所以 X 的取值范围是 $\{0,1,2\}$， -------1 分

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$， $P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$， $P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，

-------3 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

-------1 分

$E(X)=0\times\dfrac{6}{15}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$ -------2 分

（或 $X\sim B(N,n,M)$, 则 $E(X)=\dfrac{n\times M}{N}=\dfrac{2\times2}{6}=\dfrac{2}{3}$）

（Ⅲ） $D(Y)>D(X)$ -------2 分

（20）（本小题 13 分）（3+6+4）

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$， $f(0)=-2$

$f'(x)=(x-1)e^x$，$f'(0)=-1$, -------2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y+2=0$． -------1 分

（Ⅱ） $f'(x)=(x-1)e^x-ax+a=(x-1)(e^x-a)$ -------1 分

由于 $a>0$，解 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\ln a, x_2=1$，

①当 $\ln a=1$，即 $a=e$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增； -------1 分

②当 $\ln a<1$，即 $0<a<e$ 时，

在区间 $(-\infty,\ln a),(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，在区间 $(\ln a,1)$ 上，$f'(x)<0$， -------1 分

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,\ln a),(1,+\infty)$；单调减区间为 $(\ln a,1)$； --------1 分

③当 $\ln a>1$，即 $a>\mathrm{e}$ 时，

在区间 $(-\infty,1),(\ln a,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，在区间 $(1,\ln a)$ 上，$f'(x)<0$， --------1 分

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1),(\ln a,+\infty)$；单调减区间为 $(1,\ln a)$； --------1 分

综上，当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,\ln a),(1,+\infty)$，单调减区间为 $(\ln a,1)$；

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1),(\ln a,+\infty)$，单调减区间为 $(1,\ln a)$.

（III）解法一：$f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-a)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $x\geq 2$，所以 $x-1>0$，$\mathrm{e}^x-a>0$，所以 $f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\geqslant f(2)=0$ 成立 . --------1 分

②当 $0<a\leqslant \mathrm{e}^2$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(2)=0$ 成立. --------1 分

③当 $a>\mathrm{e}^2$ 时，在区间 $(2,\ln a)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 $(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(2,\ln a)$ 上单调递减，$(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(\ln a)<f(2)=0$，不符合题意. --------2 分

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,\mathrm{e}^2]$.

解法二：

“对于任意的 $x\in[2,+\infty)$，有 $f(x)\geqslant 0$”，等价于

“当 $x\geqslant 2$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}ax^2+ax\geqslant 0$ 恒成立”.

即 $\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)a\leqslant(x-2)\mathrm{e}^x$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.

当 $x=2$ 时，$0\cdot a\leqslant 0$，所以 $a\in\mathrm{R}$.

当 $x>2$ 时，$\frac{1}{2}x^2-x>0$，所以 $a\leqslant\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{\frac{1}{2}x^2-x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{x}$ 恒成立.

设 $g(x)=\frac{2\mathrm{e}^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{2(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$.

因为 $x>2$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(2)=\mathrm{e}^2$，所以 $a\leqslant \mathrm{e}^2$.

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\mathrm{e}^2\right]$.

（21）（本小题 13 分）（2+5+6）

（Ⅰ）数列 $\{a_n\}$ 是“P 数列”；数列 $\{b_n\}$ 不是“P 数列”； --------2 分

（Ⅱ）因为等差数列 $\{a_n\}$ 是“P 数列”，所以其公差 $d>1$． --------1 分

因为 $a_1=2$，所以 $S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}d$， --------1 分

由题意，得 $2n+\frac{n(n-1)}{2}d<3n^2+2n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

即 $(n-1)d<6n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

当 $n=1$ 时，$(n-1)d<6n$ 恒成立，故 $d>1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-1)d<6n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，即

$d<\frac{6n}{n-1}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立， --------1 分

因为 $\frac{6n}{n-1}=6+\frac{6}{n-1}>6$， --------1 分

所以 $d\leqslant 6$． --------1 分

所以 d 的取值范围是 $(1,6]$．

（Ⅲ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_1=1$，所以 $a_n=q^{n-1}$，

因为“P 数列”$\{a_n\}$ 的每一项均为正整数，由 $a_{n+1}-a_n>1$ 得 $a_{n+1}>a_n$，

所以 $q>1$ 且 $q\in\mathbf{N}^*$， --------1 分

因为 $a_{n+1}-a_n=q^{n-1}(q-1)$，所以 $a_{n+1}-a_n$ 单调递增

所以在数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 中，“a_2-a_1”为最小项，

在数列$\{b_{n+1}-b_n\}$中，“$b_2-b_1=\frac{a_2}{3}-\frac{a_1}{3}$”为最小项.

因为$\{a_n\}$是“P数列”，则只需$a_2-a_1>1$，所以$q>2$，　　　　--------1 分

因为数列$\{b_n\}$不是“P数列”，则$b_2-b_1=\frac{a_2}{3}-\frac{a_1}{3}\leqslant 1$，所以$q\leqslant 4$，--------1 分

因为数列$\{a_n\}$的每一项均为正整数，所以$q=3$或$q=4$

（1）当$q=3$时，$a_n=3^{n-1}$，则$c_n=\frac{3^n}{n}$，

$D_n=c_{n+1}-c_n=\frac{3^{n+1}}{n+1}-\frac{3^n}{n}=3^n\cdot\frac{2n-1}{n(n+1)}$，

又$D_{n+1}-D_n=3^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}-3^n\cdot\frac{2n-1}{n(n+1)}=\frac{3^n}{n+1}\cdot\frac{4n^2+2}{n(n+2)}>0$，

所以$\{D_n\}$为递增数列，

又$D_1=c_2-c_1=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}>1$，

所以对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$D_n>1$，即$c_{n+1}-c_n>1$，　--------2 分

所以数列$\{c_n\}$为“P数列”，符合题意.

（2）同理可知，当$q=4$时，符合题意，$a_n=4^{n-1}$.　--------1 分

综上，$a_n=3^{n-1}$或$a_n=4^{n-1}$.