北京市朝阳区2023~2024学年度第一学期期末质量检测

高二数学

2024.1

（考试时间120分钟　　满分150分）

本试卷共4页，150分。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共50分）

一、选择题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 l 的倾斜角为

（A）$-\frac{\pi}{6}$　　（B）$-\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

（2）已知等差数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，若 $a_2+a_5+a_8=3$，则 $S_9=$

（A）3　　（B）6　　（C）9　　（D）27

（3）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{2}$，其左焦点到双曲线的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则双曲线的渐近线方程为

（A）$y=\pm x$　　（B）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（C）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（D）$y=\pm 2x$

（4）过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作倾斜角为 $30°$ 的直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，则 $|AB|=$

（A）$\frac{10}{3}$　　（B）4　　（C）$\frac{13}{3}$　　（D）$\frac{16}{3}$

（5）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 CD 和 A_1B_1 的中点，则异面直线 AF 与 D_1E 所成角的余弦值是

（A）0　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

（6）若方程 $\frac{x^2}{4-m}-\frac{y^2}{m}=1$ 表示椭圆，则实数 m 的取值范围是

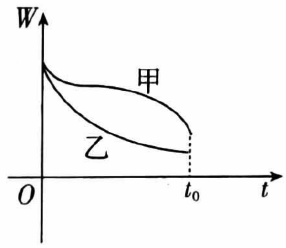
（A）$(0,4)$　　（B）$(-\infty,0)$　　（C）$(4,+\infty)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(0,4)$

（7）已知等比数列 $\{a_n\}$ 各项都为正数，前 n 项和为 S_n，则“$\{a_n\}$ 是递增数列”是“$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_{2n}<3S_n$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

(8)为了响应国家节能减排的号召,甲、乙两个工厂进行了污水排放治理,已知某月两厂污水的排放量 W 与时间 t 的关系如图所示,下列说法正确的是



(A)该月内,甲乙两厂中甲厂污水排放量减少得更多

(B)该月内,甲厂污水排放量减少的速度是先慢后快

(C)在接近 t_0 时,甲乙两厂中乙厂污水排放量减少得更快

(D)该月内存在某一时刻,甲、乙两厂污水排放量减少的速度相同

(9)A,B 是圆 $C_1:(x-2)^2+(y-m)^2=4$ 上两点,$|AB|=2\sqrt{3}$,若在圆 $C_2:(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 上存在点 P 恰为线段 AB 的中点,则实数 m 的取值范围为

(A)$[1,3]$　　　　(B)$[-5,3]$

(C)$[-5,-3]\cup[1,3]$　　　　(D)$[-4,-2]\cup[2,4]$

(10)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2^n,n\in\mathbf{N}^*$.设 $t=(a_1+1)(a_2+1)(a_4+1)\cdots(a_{2^{k-1}}+1)$,$k\in\mathbf{N}^*$,若 $\log_2(t+1)=256$,则 $k=$

(A)6　　　　(B)7　　　　(C)8　　　　(D)9

第二部分(非选择题　共 100 分)

二、填空题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分。

(11)两条直线 $l_1:x-y=0$ 与 $l_2:x-y-2=0$ 之间的距离是________.

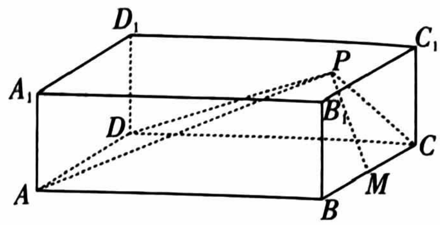
(12)已知函数 $f(x)=\sin2x$,则 $f'(0)=$________.

(13)以 $A(4,6)$,$B(-2,-2)$ 为直径端点的圆的方程是________.

(14)在空间直角坐标系中,已知点 $A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,1)$,若点 $P(x,y,-1)$ 在平面 ABC 内,写出一个符合题意的点 P 的坐标________.

(15)某学校球类社团组织学生进行单淘汰制的乒乓球比赛(负者不再比赛),如果报名人数是 2 的正整数次幂,那么每 2 人编为一组进行比赛,逐轮淘汰.以 2022 年世界杯足球赛为例,共有 16 支队进入单淘汰制比赛阶段,需要四轮,8+4+2+1=15 场比赛决出冠军.如果报名人数不是 2 的正整数次幂,则规定在第一轮比赛中安排轮空(轮空不计入场数),使得第二轮比赛人数为 2 的最大正整数次幂.(如 20 人参加单淘汰制比赛,第一轮有 12 人轮空,其余 8 人进行 4 场比赛,淘汰 4 人,使得第二轮比赛人数为 16.)最终有 120 名同学参加校乒乓球赛,则直到决出冠军共需________轮;决出冠军的比赛总场数是________.

(16)如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=AD=3$,$AA_1=1$,M 为棱 BC 的中点,点 P 是侧面 CC_1D_1D 上的动点,满足 $\angle APD=\angle CPM$,给出下列四个结论:



① 动点 P 的轨迹是一段圆弧;

② 动点 P 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{3}$;

③ 动点 P 的轨迹与线段 CC_1 有且只有一个公共点;

④ 三棱锥 $P-ADD_1$ 的体积的最大值为 $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 5 小题,共 70 分.解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.

(17)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=(2x^2-3x)e^x$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的单调区间.

(18)(本小题 13 分)

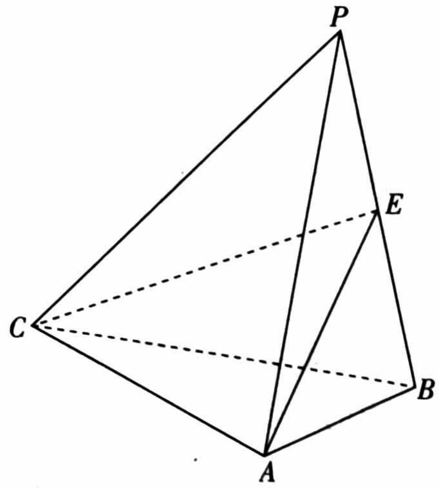
已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,满足 $S_n=2a_n-1$,$n\in\mathbf{N}^*$.数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,且 $b_1=-a_1$,$b_2+b_4=-10$.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和.

(19)(本小题 14 分)

如图,三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB=BC=CA=PB=1$,平面 $PAB\perp$平面 ABC,点 E 是棱 PB 的中点,再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.



(Ⅰ)求证:$AB\perp PC$;

(Ⅱ)求二面角 $E-AC-B$ 的余弦值.

条件①:$PC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

条件②:直线 PC 与平面 PAB 所成角为 45°.

注:如果选择条件①和条件②分别解答,按第一个解答计分.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点坐标为$(0,\sqrt{5})$,离心率为$\dfrac{2}{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的标准方程;

(Ⅱ)过椭圆 E 的右焦点 F 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 A,B 两点,线段 AB 的垂直平分线 m 分别交直线 l,x 轴,y 轴于点 M,N,K,求$\dfrac{|KN|}{|MN|}$的值.

(21)(本小题 15 分)

设正整数 $n\geqslant 4$,若由实数组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 满足如下性质,则称 A 为$\mathcal{H}_n$集合:对 A 中任意四个不同的元素 a,b,c,d,均有 $ab+cd\in A$.

(Ⅰ)判断集合 $A_1=\left\{0,\dfrac{1}{2},1,2\right\}$和 $A_2=\left\{\dfrac{1}{3},1,2,3\right\}$是否为$\mathcal{H}_4$集合,说明理由;

(Ⅱ)若集合 $A=\{0,x,y,z\}$ 为$\mathcal{H}_4$集合,求 A 中大于 1 的元素的可能个数;

(Ⅲ)若集合 A 为$\mathcal{H}_n$集合,求证:A 中元素不能全为正实数.