东城区 2023-2024 学年度第二学期期末教学统一检测

高二数学　　2024.7

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

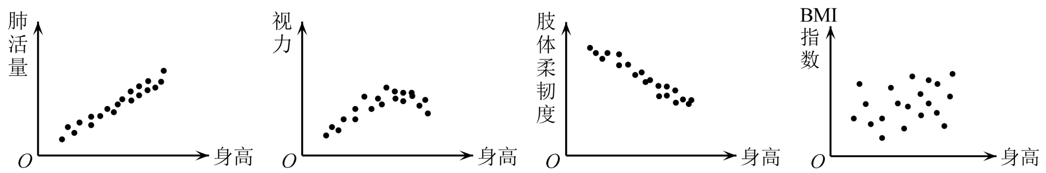
一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $M=\{0,a,a^2\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，若 $1\in M$，则 $M\cap N=$

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{-1,0,1\}$

（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）某校学生科研兴趣小组为了解 1~12 岁儿童的体质健康情况，随机调查了 20 名儿童的相关数据，分别制作了肺活量、视力、肢体柔韧度、BMI 指数和身高之间的散点图，则与身高之间具有正相关关系的是



（A）肺活量　　（B）视力

（C）肢体柔韧度　　（D）BMI 指数

（3）已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x>y$，则下列不等式中一定成立的是

（A）$x^2>y^2$　　（B）$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

（C）$\ln x>\ln y$　　（D）$2^x>2^y$

（4）袋中有 10 个大小相同的小球，其中 7 个黄球，3 个红球. 每次从袋子中随机摸出一个球，摸出的球不再放回. 则在第一次摸到黄球的前提下，第二次又摸到黄球的概率为

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$

（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{3}{10}$

（5）已知 $2^a=3$，$\log_4 5=b$，则 2^{a-2b} 的值为

（A）15　　　　（B）$\dfrac{5}{3}$

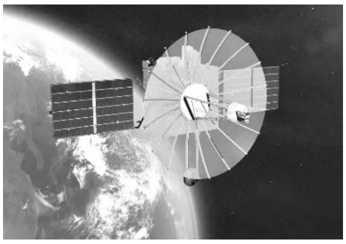
（C）$\dfrac{3}{5}$　　　　（D）-2

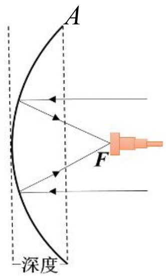
（6）A，B，C 三所大学发布了面向高二学生的夏令营招生计划，每位学生只能报一所大学. 某中学现有四位学生报名. 若每所大学都有该中学的学生报名，则不同的报名方法共有

（A）30 种　　　　（B）36 种

（C）72 种　　　　（D）81 种

（7）2024 年 3 月 20 号，我国成功发射鹊桥二号中继卫星，其通过一个大型可展开的星载天线，实现了月球背面与地球之间的信号传输. 星载天线展开后形成一把直径（口经）为 4.2m 的“金色大伞”，它的曲面与轴截面的交线为抛物线，在轴截面内的卫星波束呈近似平行状态射入接收天线，经反射聚集到焦点 F 处. 若“金色大伞”的深度为 0.49m，则“金色大伞”的边缘 A 点到焦点 F 的距离为





（A）2.25 m　　　　（B）2.74 m

（C）4.5 m　　　　（D）4.99 m

（8）已知直线 l：$mx-y-2m+5=0$ 被圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 截得的弦长为整数，则满足条件的直线 l 共有

（A）1条　　　　（B）2条

（C）3条　　　　（D）4条

（9）已知函数 $f(x)=a(x-a)(x-b)^2(a,b\in\mathbf{R})$，则“$b>a>0$”是“$b$ 为 $f(x)$ 的极小值点”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（10）《孙子算经》是中国南北朝时期重要的数学著作，书中的“中国剩余定理”对同余除法进行了深入的研究．现给出一个同余问题：如果 a 和 b 被 m 除得的余数相同，那么称 a 和 b 对模 m 同余，记为 $a \equiv b\left(\bmod m\right)$. 若 $a = \mathrm{C}_{2024}^{0} + \mathrm{C}_{2024}^{1} \times 3 + \mathrm{C}_{2024}^{2} \times 3^{2} + \cdots + \mathrm{C}_{2024}^{2024} \times 3^{2024}$，$a \equiv b\left(\bmod 5\right)$，则 b 的值可以是

（A）2023　　　　（B）2024

（C）2025　　　　（D）2026

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln x$ 的定义域是____________.

（12）已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 C 的方程为____________.

（13）已知二项式 $(2x+1)^n = {}_{n}\ {}^{n} + {}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + {}_{1}\ + {}_{0}$ 的所有项的系数和为 243，则 $n=$______；$a_2=$____________.

（14）某学校要求学生每周校园志愿服务时长不少于 1 小时，某周可选择的志愿服务项目如下表所示：

岗位	环保宣讲	器材收纳	校史讲解	食堂清扫	图书整理
时长	20 分钟	20 分钟	25 分钟	30 分钟	40 分钟

每位学生每天最多可选一个项目，且该周同一个项目只能选一次，则不同选择的组合方式共有_________种.

（15）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases} ax^3-x, & x>a, \\ -x^2, & x\leqslant a. \end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 0；

②当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 是增函数；

③若函数 $f(x)$ 存在两个零点，则 $0<a<1$；

④若直线 $y=ax$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有 2 个交点，则 $a<0$.

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

某次乒乓球比赛单局采用 11 分制，每赢一球得一分，每局比赛开始时，由一方进行发球，随后每两球交换一次发球权，先得 11 分且至少领先 2 分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成$10:10$后，每球交换发球权，领先 2 分者胜，该局比赛结束．已知甲、乙两人要进行一场五局三胜制（当一方赢得三局比赛时，该方获胜，比赛结束）的比赛．

（Ⅰ）单局比赛中，若甲发球时甲得分的概率为$\frac{4}{5}$，乙发球时甲得分的概率为$\frac{1}{2}$，求甲$4:0$领先的概率；

（Ⅱ）若每局比赛乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$，每局比赛结果相互独立，求乙以$3:1$赢得比赛的概率．

（17）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=ae^{x}+x$ ，其中 $a\in\mathbf{R}$.曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-x+b$.

(Ⅰ)求 a,b 的值；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的单调区间.

（18）（本小题 14 分）

近年来，我国新能源汽车蓬勃发展，极大地促进了节能减排．遥遥计划在 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 这 6 个国产新能源品牌或在 B_1,B_2,B_3,B_4 这 4 个国产燃油汽车品牌中选择购车．预计购买新能源汽车比燃油车多花费 40 000 元．据测算，每行驶 5 公里，燃油汽车约花费 3 元，新能源汽车约消耗电 1 千瓦时．如果购买新能源汽车，遥遥使用国家电网所属电动汽车公共充电设施充电，充电价格分为峰时、平时、谷时三类，具体收费标准（精确到 0.1 元/千瓦时）如下表：

	充电时间段	充电价格（元/千瓦时）	充电服务费（元/千瓦时）
峰时	10：00—15：00 和 18：00—21：00	1.0	0.8
平时	7：00—10：00，15：00—18：00 和 21：00—23：00	0.7	
谷时	当日 23：00—次日 7：00	0.4	

（Ⅰ）若遥遥在 6 个新能源汽车品牌中选出 2 个品牌作比较，求品牌 A_1 被选中的概率；

（Ⅱ）若遥遥选购新能源汽车，他在 18：00，18：30，19：00，19：30，…，23：30 这 12 个时间点中随机选择一个时间点给车充电，每次充电 30 千瓦时（用时不超过半小时），设 X 为遥遥每次充电的费用，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设遥遥一年驾车约行驶 30 000 公里，按新车使用 8 年计算，如果只考虑购车成本与能源消耗支出，计算说明选择新能源汽车和燃油汽车哪个的总花费更少.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$过点$(0,\sqrt{3})$，$A,B$分别是$E$的左顶点和下顶点，$F$是$E$右焦点，$\angle AFB=\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）求E的方程;

（Ⅱ）过点F的直线与椭圆E交于两点P,Q，直线AP，AQ分别与直线$x=4$交于不同的两点M，N. 设直线FM ,FN的斜率分别为k_1，k_2. 求证：k_1k_2为定值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=x^2-a\ln x-1\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当$a=2$时，求$f(x)$的极值;

（Ⅱ）若对$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)>0$恒成立，求a的取值范围;

（Ⅲ）证明：若$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上存在唯一零点x_0，则$x_0<\mathrm{e}^{a-2}$（其中$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）.

（21）（本小题 15 分）

已知n项数列$A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n$（$n \geqslant 3$），满足$\forall i \neq j$有$a_i \neq a_j$．对于变换$T$满足$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，有$T(a_i) \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，且$\forall i \neq j$有$T(a_i) \neq T(a_j)$，称数列$T(A_n): T(a_1), T(a_2), \cdots, T(a_n)$是数列$A_n$的一个排列．$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，记$T(a_i) = T^1(a_i)$，$T^{k+1}(a_i) = T(T^k(a_i))(k \in \mathbf{N}^*)$，如果$k$是满足$T^k(a_i) = a_{n+1-i}$的最小正整数，称数列$A_n$存在$k$阶逆序排列，称$T$是$A_n$的$k$阶逆序变换．

（Ⅰ）已知数列$A_4: 1, 2, 3, 4$，数列$T(A_4): 3, 1, 4, 2$，求$T^2(A_4)$，$T^4(A_4)$；

（Ⅱ）证明：对于4项数列A_4，不存在3阶逆序变换；

（Ⅲ）若n项数列A_n存在3阶逆序变换，求n的最小值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）