北京市朝阳区2023~2024学年度第一学期期末质量检测

高二数学参考答案

2024.1

一、选择题(共10小题,每小题5分,共50分)

(1)C　　(2)C　　(3) A　　(4) D　　(5)B

(6)B　　(7)D　　(8) D　　(9) C　　(10)C

二、填空题(共6小题,每小题5分,共30分)

(11)$\sqrt{2}$　　(12) 2　　(13) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

(14)$(1,1,-1)$(答案不唯一,满足$x+y=2$)　　(15) 七;119　　(16) ①②④

三、解答题(共5小题,共70分)

(17)(本小题13分)

解:(Ⅰ)$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$.

$f'(x)=(2x^2+x-3)e^x$.

所以$f'(0)=-3$.又因为$f(0)=0$,

所以$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-3x$. ……………………… 5分

(Ⅱ)$f'(x)=(2x^2+x-3)e^x$.

令$f'(x)>0$,即$(2x^2+x-3)e^x>0$,解得$x<-\frac{3}{2}$或$x>1$.

令$f'(x)<0$,即$(2x^2+x-3)e^x<0$,解得$-\frac{3}{2}<x<1$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-\frac{3}{2})$,$(1,+\infty)$;

单调递减区间为$(-\frac{3}{2},1)$. ……………………… 13分

(18)(本小题13分)

解:(Ⅰ)当$n=1$时,$S_1=2a_1-1=a_1$得$a_1=1$.

当$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$, ①

由已知$S_n=2a_n-1$, ②

②-①得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$.

所以$a_n=2a_{n-1}$.

所以数列$\{a_n\}$为等比数列,且公比为$q=2$.

因为$a_1=1$,所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

设数列$\{b_n\}$公差为d,

$b_1=-1$,$b_2+b_4=(b_1+d)+(b_1+3d)=2b_1+4d=-10$,

由$\begin{cases}b_1=-1,\\b_1+2d=-5\end{cases}$得$d=-2$.

所以$b_n=b_1+(n-1)d=-1+(n-1)\times(-2)=-2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………… 8分

（Ⅱ）设 $c_n=a_n+b_n=2^{n-1}+(-2n+1)$，前 n 项和

$$T_n=(1+2+4+\cdots+2^{n-1})-2\times(1+2+3+\cdots+n)+n$$

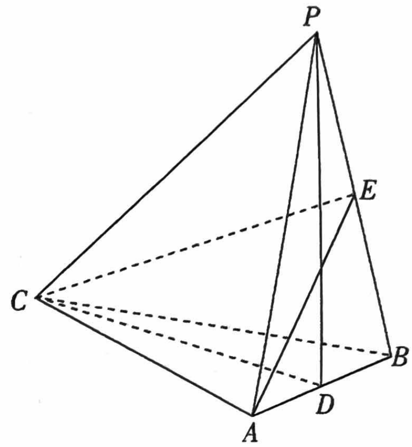
$$=\frac{1-2^n}{1-2}-2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=2^n-n^2-1.$$ ……………………… 13 分

（19）（本小题 14 分）

解：选择条件①：

（Ⅰ）取 AB 的中点 D，连接 CD，PD.



由于 $\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $CD\perp AB$，

又平面 $ABC\perp$ 平面 PAB，$CD\subset$ 平面 ABC，

平面 $ABC\cap$ 平面 $PAB=AB$，

故 $CD\perp$ 平面 PAB.

而 $PD\subset$ 平面 PAB，故 $CD\perp PD$，即 $\angle PDC=90°$，

所以 $PD=\sqrt{PC^2-CD^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $BP=1$，$BD=\frac{1}{2}$，故 $PB^2=PD^2+BD^2$，

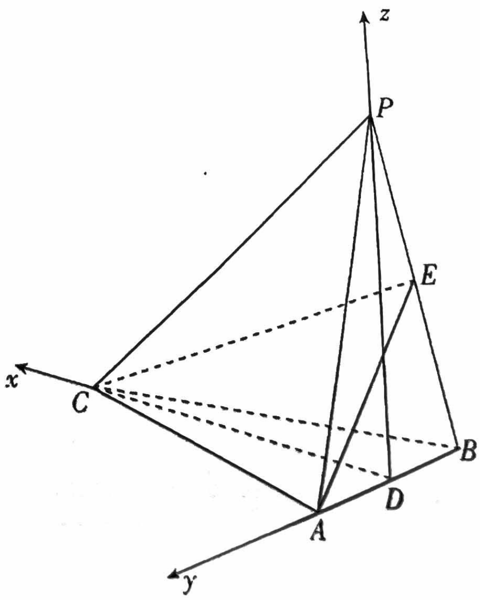
所以 $\angle BDP=90°$，即 $AB\perp PD$.

因为 $AB\perp CD$，$PD\cap CD=D$，PD，$CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB\perp$ 平面 PCD.

所以 $AB\perp PC$. ……………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 DP，DC，DA 两两垂直，以 D 为坐标原点建立如图空间直角坐标系.



于是 $A(0,\frac{1}{2},0)$，$B(0,-\frac{1}{2},0)$，$C(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0)$，

$P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

点 E 是棱 PB 的中点，所以 $E(0,-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$.

于是 $\overrightarrow{CE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，

又 $\overrightarrow{AC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 EAC 的法向量.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot \boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)\cdot(x,y,z)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot \boldsymbol{n}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(x,y,z)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\end{cases}$$

令 $y=\sqrt{3}$，可得 $x=1,z=3$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},3)$.

又 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$ 是平面 ABC 的法向量.

设二面角 $E-AC-B$ 大小为 θ，由题可知 θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ························ 14 分

选择条件②：

（Ⅰ）取 AB 的中点 D，连接 CD,PD.

由于 $\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $CD\perp AB$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ABP，$CD\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABP=AB$，

所以 $CD\perp$ 平面 ABP.

所以 PC 在平面 ABP 上的射影是 PD.

所以 $\angle CPD$ 是 PC 与平面 ABP 所成角.

所以 $\angle CPD=45°$.

所以 $PD=CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $BP=1,BD=\frac{1}{2}$，故 $BP^2=PD^2+BD^2$，所以 $\angle BDP=90°$，即 $AB\perp PD$.

因为 $AB\perp CD$，$PD\cap CD=D$，$PD,CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB\perp$ 平面 PCD.

所以 $AB\perp CP$. ··························· 6 分

（Ⅱ）同上. ························ 14 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由已知 $\begin{cases}b=\sqrt{5},\\ e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=3$，则椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ········ 4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$k\neq 0$.

代入椭圆 E，整理得，

$(9k^2+5)x^2-36k^2x+36k^2-45=0$.

$\Delta=900(k^2+1)>0$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$.

则 $x_A+x_B=\dfrac{36k^2}{9k^2+5}$，则 $x_M=\dfrac{1}{2}(x_A+x_B)=\dfrac{18k^2}{9k^2+5}$，

则 $y_M=k(\dfrac{18k^2}{9k^2+5}-2)=\dfrac{-10k}{9k^2+5}$.

依题意 m 的方程为 $y+\dfrac{10k}{9k^2+5}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{18k^2}{9k^2+5})$.

令 $y=0$，得 $x_N=\dfrac{8k^2}{9k^2+5}$.

则 $\dfrac{|KN|}{|KM|}=\dfrac{x_N}{x_M}=\dfrac{4}{9}$，则 $\dfrac{|KN|}{|MN|}=\dfrac{4}{5}$. ························ 15 分

(21)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)集合 A_1 是 $\mathcal{H}_4$ 集合，理由如下：

当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{\{0,\frac{1}{2}\},\{1,2\}\}$ 时，$0\times\frac{1}{2}+1\times2=2\in A_1$；

当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{\{0,1\},\{\frac{1}{2},2\}\}$ 时，则 $0\times1+\frac{1}{2}\times2=1\in A_1$；

当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{\{0,2\},\{1,\frac{1}{2}\}\}$ 时，$0\times2+\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}\in A_1$.

集合 A_2 不是 $\mathcal{H}_4$ 集合，理由如下：

取 $(a,b,c,d)=(\frac{1}{3},1,2,3)$，则 $ab+cd=\frac{1}{3}\times1+2\times3=\frac{19}{3}\notin A_2$，

不满足题中性质. ························ 4 分

(Ⅱ)当 $(a,b,c,d)=(0,z,x,y)$ 时，$ab+cd=xy\in A$；

当 $(a,b,c,d)=(0,x,y,z)$ 时，$ab+cd=yz\in A$；

当 $(a,b,c,d)=(0,y,z,x)$ 时，$ab+cd=xz\in A$.

所以 $\{x,y,z\}=\{xy,yz,xz\}$.

不妨设 $x<y<z$.

①若 $x<y<z<0$，因为 $yz>0$，从而 $yz\notin A$，与 $yz\in A$ 矛盾.

②若 $x<y<0<z$，因为 $xz<yz<xy$，故 $xz=x,yz=y,xy=z$，所以 $z=1,xy=1$.

经验证此时 $A=\{x,\frac{1}{x},0,1\}$ 是 $\mathcal{H}_4$ 集合，元素大于 1 的个数为 0.

③若 $x<0<y<z$，因为 $xz<xy<0$，所以与 $\{x,y,z\}=\{xy,yz,xz\}$ 矛盾.

④若 $0<x<y<z$，因为 $xy<xz<yz$，故 $xy=x,xz=y,yz=z$，所以 $y=1,z=\frac{1}{x}>1$.

经验证此时 $A=\{0,x,1,\frac{1}{x}\}$ 是 $\mathcal{H}_4$ 集合，大于 1 的个数为 1.

综上，A 中大于 1 的元素的可能个数为 0,1. ························ 9 分

(Ⅲ)假设集合 A 中全为正实数.

若 A 中至少有两个正实数大于 1,设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$,则 $a_n>a_{n-1}>1$,

取 $(a,b,c,d)=(a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)$,则 $ab+cd=a_{n-3}a_{n-2}+a_{n-1}a_n\in A$,

而 $a_{n-3}a_{n-2}+a_{n-1}a_n>a_{n-1}a_n>a_n$,从而 $a_{n-3}a_{n-2}+a_{n-1}a_n\notin A$,矛盾.

因此 A 中至多有 1 个正实数大于 1.

当 $n=4$ 时,设 $a_1<a_2<a_3<a_4$.

若 $0<a_1<a_2<a_3\leqslant 1<a_4$,

当 $(a,b,c,d)=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 时,$ab+cd=a_1a_2+a_3a_4\in A$;

当 $(a,b,c,d)=(a_1,a_3,a_2,a_4)$ 时,$ab+cd=a_1a_3+a_2a_4\in A$;

当 $(a,b,c,d)=(a_1,a_4,a_2,a_3)$ 时,$ab+cd=a_1a_4+a_2a_3\in A$.

由于 $(a_1a_2+a_3a_4)-(a_1a_3+a_2a_4)=a_4(a_3-a_2)-a_1(a_3-a_2)$

$$=(a_4-a_1)(a_3-a_2)>0,$$

$(a_1a_3+a_2a_4)-(a_1a_4+a_2a_3)=a_2(a_4-a_3)-a_1(a_4-a_3)$

$$=(a_4-a_3)(a_2-a_1)>0,$$

所以 $a_1a_2+a_3a_4>a_1a_3+a_2a_4>a_1a_4+a_2a_3>a_1$.

所以 $a_1a_2+a_3a_4=a_4,a_1a_3+a_2a_4=a_3,a_1a_4+a_2a_3=a_2$.

因为 $0<a_3-a_1<1$,

所以 $a_4-a_2=(a_1a_2+a_3a_4)-(a_1a_4+a_2a_3)$

$$=a_4(a_3-a_1)-a_2(a_3-a_1)$$

$$=(a_4-a_2)(a_3-a_1)<a_4-a_2,$$ 矛盾.

因此当 $n=4$ 时,$0<a_1,a_2,a_3,a_4\leqslant 1$.

当 $n\geqslant 5$ 时,集合 A 中至少有 4 个不同的正实数不大于 1.

设 $S=\{t\mid t=|a_i-a_j|,i,j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j\}$,

因为 S 是有限集,设 $s-r=\min S$,其中 $r,s\in A,r<s$.

又因为集合 A 中至少有 4 个不同的正实数不大于 1,

所以 $s-r<1$,且存在 $p,q\in A$ 且 $p\leqslant 1,q\leqslant 1$ 使 p,q,r,s 互不相同.

则 $0<|p-q|<1$.

当 $(a,b,c,d)=(r,p,s,q)$ 时,$ab+cd=rp+sq\in A$,

当 $(a,b,c,d)=(s,p,r,q)$ 时,$ab+cd=sp+rq\in A$.

于是 $|(rp+sq)-(sp+rq)|=|p(r-s)-q(r-s)|=|p-q|(s-r)<s-r$,

与 $s-r=\min S$ 矛盾.

因此,A 中元素不能全为正实数. ························ 15 分