东城区 2023-2024 学年度第二学期期末教学统一检测

高二数学参考答案及评分标准

2024.7

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　　（2）A　　（3）D　　（4）A　　（5）C

（6）B　　（7）B　　（8）C　　（9）A　　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(1,+\infty)$　　（12）$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

（13）5　　40　　（14）20

（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 A：单局比赛中甲 $4:0$ 领先，

则 $P(A)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{25}$.　　…………………………………………6 分

所以单局比赛中甲 $4:0$ 领先的概率是 $\dfrac{4}{25}$.

（Ⅱ）设事件 B：乙以 $3:1$ 赢得比赛，

则 $P(B)=C_3^1\times\dfrac{2}{3}\times(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{2}{27}$.

所以乙以 $3:1$ 赢得比赛的概率为 $\dfrac{2}{27}$.　　…………………………………………13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）依题意，$f(0)=a=b$.

因为 $f'(x)=a\mathrm{e}^x+1$，所以 $f'(0)=a+1$.

依题意，$f'(0)=-1$，故 $a+1=-1$，得 $a=-2$.

所以 $a=b=-2$.　　…………………………………………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=-2e^x+1$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\ln 2$.

令 $f'(x)>0$，得 $x<-\ln 2$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\ln 2)$ 上单调递增；

令 $f'(x)<0$，得 $x>-\ln 2$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\ln 2,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln 2)$；

单调递减区间为 $(-\ln 2,+\infty)$. ……………………………………………13 分

（18）（共 14 分）

解:（Ⅰ）设事件 A：遥遥在 6 个新能源汽车品牌中选出 2 个品牌作比较，品牌 A_1 被选中，

则 $P(A)=\dfrac{C_5^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{3}$.

所以遥遥在 6 个新能源汽车品牌中选出 2 个品牌作比较，品牌 A_1 被选中的概率是 $\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………4 分

（Ⅱ）12 个整点或半点中，“峰时”有 6 个，“平时”有 4 个，“谷时”有 2 个.

X 的所有可能取值为 36，45，54.

$P(X=36)=\dfrac{2}{12}$，$P(X=45)=\dfrac{4}{12}$，$P(X=54)=\dfrac{6}{12}$，

所以 X 的分布列为

X	36	45	54
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

所以 $E(X)=36\times\dfrac{1}{6}+45\times\dfrac{1}{3}+54\times\dfrac{1}{2}=48$（元）. ……………………………9 分

（Ⅲ）按新车使用 8 年计算，燃油汽车使用的燃油费为 $\dfrac{30\,000\times 8}{5}\times 3=144\,000$（元），

新能源汽车使用电费最多为 $\dfrac{30\,000\times 8}{5}\times(1.0+0.8)=86\,400$（元），

因为购买新能源汽车比燃油汽车多花费 $40\,000$ 元，

所以$144\,000-40\,000-86\,400=17\,600$ （元）.

新能源汽车至少比燃油车总花费少$17\,600$元，所以选择新能源汽车总花费更少.

……………………..……14 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$过点$(0,\sqrt{3})$，得$b=\sqrt{3}$.

因为$\angle AFB=\dfrac{\pi}{3}$，所以$c=1$.

由于$a^2=b^2+c^2$，解得$a^2=4$.

所以E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………..……4 分

（Ⅱ）设直线PQ的方程为$x=my+1$.

由$\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

所以$\Delta=(6m)^2+36(3m^2+4)=144m^2+144>0$.

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$.

直线AP的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

令$x=4$，得点M的纵坐标为$y_M=\dfrac{6y_1}{x_1+2}=\dfrac{6y_1}{my_1+3}$.

同理可得点N的纵坐标为$y_N=\dfrac{6y_2}{my_2+3}$.

$$k_1k_2=\frac{y_M}{4-1}\cdot\frac{y_N}{4-1}=\frac{y_My_N}{9}=\frac{4y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}=\frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$$

$$=\frac{\dfrac{-36}{3m^2+4}}{\dfrac{-9m^2}{3m^2+4}-\dfrac{18m^2}{3m^2+4}+9}=-1.$$

所以k_1k_2为定值. ………………………..……15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

当 $a=2$ 时，$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$ ，解得 $x=1$ ，或 $x=-1$（舍）.

当 x 变化时，$f'(x)$ ，$f(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增

因此，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值，极小值为 $f(1)=0$.

（Ⅱ）$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-a}{x}$.

(1)当 $a\leqslant 2$ 时，因为 $x\in(1,+\infty)$ ，所以 $2x^2-a>0$. 所以 $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 故 $f(x)>f(1)=0$ ，满足题意.

(2)当 $a>2$ 时，令 $f'(x)<0$ ，得 $1<x<\frac{\sqrt{2a}}{2}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{\sqrt{2a}}{2})$ 上单调递减. 所以 $f(\frac{\sqrt{2a}}{2})<f(1)=0$, 不符合题意.

综上可知，$a\in(-\infty,2]$. ……………………………9 分

（Ⅲ）当 $a\leqslant 2$ 时，由（Ⅱ）知，对任意 $x\in(1,+\infty)$ ，$f(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 没有零点，不符合题意.

当 $a>2$ 时，因为 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{\sqrt{2a}}{2})$ 上单调递减，且 $f(1)=0$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{\sqrt{2a}}{2}]$ 上无零点.

因为 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0 ，所以 $x_0>\frac{\sqrt{2a}}{2}$.

因为当 $x>\frac{\sqrt{2a}}{2}$ 时，$f'(x)>0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2a}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

要证 $x_0<\mathrm{e}^{a-2}$ ，只要证 $f(x_0)<f(\mathrm{e}^{a-2})$ ，即只要证 $f(\mathrm{e}^{a-2})>0$.

$f(\mathrm{e}^{a-2})=\mathrm{e}^{2a-4}-a(a-2)-1$ ，令 $t=a-2>0$ ，只要证 $\mathrm{e}^{2t}-t(t+2)-1>0$.

令 $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)-1(x>0)$， $g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2x-2$．

令 $h(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2x-2$，当 $x>0$ 时， $h'(x)=4\mathrm{e}^{2x}-2>0$，

所以 $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则有 $g'(x)>g'(0)=0$．

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则有 $g(x)>g(0)=0$，

于是 $f(\mathrm{e}^{a-2})>0$ 得证．故 $x_0<\mathrm{e}^{a-2}$．　　　　……………………………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为数列 $A_4:1,2,3,4$， $T(A_4):3,1,4,2$，

所以 $T^2(A_4):4,3,2,1$， $T^3(A_4):2,4,1,3$， $T^4(A_4):1,2,3,4$．　…………………4 分

（Ⅱ）对数列 A_4 的任意变换 T，

①若存在 $i\in\{1,2,3,4\}$，有 $T(a_i)=a_i$，则 $T^3(a_i)=a_i\neq a_{5-i}$，则 T 不是 A_4 的 3 阶逆序变换．

②若对 $\{i,j,s,t\}=\{1,2,3,4\}$，有 $T(a_i)=a_j$， $T(a_j)=a_i$，　$T(a_s)=a_t$， $T(a_t)=a_s$，

则 $T^3(a_i)=T^2(a_j)=T(a_i)$， $T^3(a_j)=T(a_j)$， $T^3(a_s)=T(a_s)$， $T^3(a_t)=T(a_t)$．

所以 $T^3(A_4)$ 和 $T(A_4)$ 是相同的数列．

若 $T^3(A_4)$ 是 A_4 的逆序排列，则 $T(A_4)$ 也是 A_4 的逆序排列．所以 T 不是 3 阶逆序变换．

③若对 $\{i,j,s,t\}=\{1,2,3,4\}$，有 $T(a_i)=a_j$， $T(a_j)=a_s$，　$T(a_s)=a_t$， $T(a_t)=a_i$，

则 $T^3(a_i)=T^2(a_j)=T(a_s)=a_t$， $T^3(a_t)=T^2(a_i)=T(a_j)=a_s\neq a_i$．

所以 T 不是 A_4 的 3 阶逆序变换．

综上所述，对于 4 项数列 A_4，不存在 3 阶逆序变换．　………………………9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，4 项数列 A_4 不存在 3 阶逆序变换．

对于3项数列$A_3:a_1,a_2,a_3$，

①若$T(a_1)=a_1$，则$T^3(a_1)=a_1\neq a_3$，所以变换T不是A_3的3阶逆序变换.

②若$T(a_1)=a_2$，

当$T(a_2)=a_1$时有$T(a_3)=a_3$，则$T^3(a_3)=a_3\neq a_1$，

所以变换T不是A_3的3阶逆序变换.

当$T(a_2)=a_3$时有$T(a_3)=a_1$，则$T^3(a_1)=T^2(a_2)=T(a_3)=a_1\neq a_3$，

所以变换T不是A_3 的3阶逆序变换.

③若$T(a_1)=a_3$，同②可知，变换T不是A_3的3阶逆序变换.

所以3项数列A_3不存在3阶逆序变换.

对于5项数列$A_5:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$，

若存在3阶逆序变换T，则$T^3(a_1)=a_5$，$T^3(a_2)=a_4$，$T^3(a_3)=a_3$，$T^3(a_4)=a_2$，$T^3(a_5)=a_1$.

①若$T(a_3)=a_3$，则对于数列$A_4:a_1,a_2,a_4,a_5$和上述的变换T，

有$T^3(a_1)=a_5$，$T^3(a_2)=a_4$，$T^3(a_4)=a_2$，$T^3(a_5)=a_1$.

所以这个4项数列$A_4:a_1,a_2,a_4,a_5$存在3阶逆序变换，与（Ⅱ）结论矛盾.

②若$T(a_3)\neq a_3$，因为$T^3(a_3)=a_3$，则存在$i,j\in\{1,2,4,5\}$，有$T(a_3)=a_i$，$T(a_i)=a_j$，$T(a_j)=a_3$.

此时，$T^3(a_i)=T^2(a_j)=T(a_3)=a_i\neq a_{5-i}$，与$T$是3阶逆序变换矛盾.

所以，5项数列A_5不存在3阶逆序变换.

对于6项数列$A_6:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$，存在变换$T$使得$T(A_6):a_2,a_3,a_6,a_1,a_4,a_5$，

则$T^2(A_6):a_3,a_6,a_5,a_2,a_1,a_4$，$T^3(A_6):a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1$.

所以6项数列A_6存在3阶逆序变换.

综上，n的最小值为6. ……………………………15 分