

北京市朝阳区 2023~2024 学年度第二学期期末质量检测

高二数学试卷

2024. 7

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷共 6 页, 150 分。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 50 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2^x \geq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 1 \leq 0\}$. 则 $A \cap B =$

- A. $\{x \mid x \geq 1\}$ B. $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x \mid x \leq 0\}$ D. $\{x \mid x \leq 1\}$

2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $(\frac{1}{2})^a > (\frac{1}{2})^b$ C. $a^3 > b^3$ D. $ac^2 > bc^2$

3. 下列函数中, 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是

- A. $f(x) = x^2 - x$ B. $f(x) = \frac{1}{x}$ C. $f(x) = 2^{-x}$ D. $f(x) = \sqrt{x}$

4. 已知 $a = \log_3 2$, $b = \log_9 5$, $c = \frac{1}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

5. 从 20 名学生中随机选出 2 名学生代表, 则甲学生被选中的概率是

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

6. “杨辉三角”是数学史上的一个重要成就, 本身包含许多有趣的性质, 如图:

第0行	1
第1行	1 1
第2行	1 2 1
第3行	1 3 3 1
第4行	1 4 6 4 1
第5行	1 5 10 10 5 1
⋮		⋮

则第 8 行的第 7 个数是

- A. 8 B. 21 C. 28 D. 56

7. “ $m < 4$ ” 是 “ $4x^2 - mx + 1 > 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立” 的

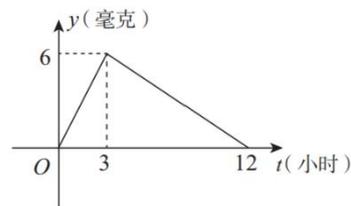
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知某兴趣小组组织 A、B、C 三项比赛，请甲、乙、丙三位同学参加，每项冠军只有一人，若甲恰好拿到其中一项冠军，则不同的冠军归属有

- A. 6 种 B. 12 种 C. 18 种 D. 27 种

9. 某研究所开发一种新药，据监测，一次性服药 t ($0 \leq t \leq 12$) 小时后每毫升血液中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间近似满足图中所示的曲线关系. 据测定，每毫升血液中含药量不少于 4 毫克时治疗疾病有效，则 12 小时内药物在体内对治疗疾病一直有效所持续的时长为

- A. 4 小时 B. 5 小时 C. 6 小时 D. 7 小时



10. 已知函数 $f(x) = 4x - \frac{1}{x} - 4\ln(2x)$. 设 $P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$ 是函数图象上不同的两点，且 $f(x_1) = -f(x_2)$ ，则 $x_1 + x_2$ 的取值范围是

- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, 1)$

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域是_____.

12. 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 2$, 则 ab 的最大值为_____.

13. 在 $(x - \frac{1}{x})^n$ 的展开式中，所有项的二项式系数之和为 64，则 $n =$ _____；常数项为_____。（用数字作答）

14. 袋中有编号为 1,2,3,4,5 的 5 个球，从中任取 3 个球，共有_____种不同的取法；记 X 为取出的三个球的最小号码，则 $P(X = 2) =$ _____。（用数字作答）

15. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$, 若 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \leq 1$, $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) = 1$, 则 $f(x) =$ _____。（写出满足条件的一个 $f(x)$ 的解析式）

16. 已知函数 $f(x) = \frac{2x}{|x-2|}$, 给出下列四个结论:

- ① 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增;
- ② 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称;
- ③ $f(x) + 2 > 0$ 恒成立;
- ④ 函数 $y = f(x) - x + 1$ 有且只有一个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17.(本小题 12 分)

已知非空集合 $A = \{x | x^2 - t < 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$.

(I) 当 $t = 4$ 时, 求 $A \cup B$;

(II) 若 $A \cap B = A$, 求实数 t 的取值范围.

18. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = a(x^2 - 3)e^x$, $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 的极小值为 $-2e$, 求 a 的值.

19. (本小题 14 分)

某工厂有甲、乙两个车间生产同一种零件, 下表记录了随机抽取的上一年 10 个工作日两个车间生产的零件个数:

甲车间	62	63	43	74	73	70	59	70	43	66
乙车间	39	45	50	36	23	20	23	38	51	39

(I) 从记录的这 10 个工作日中随机抽取 1 天, 求甲车间生产的零件个数小于 50 的概率;

(II) 用频率估计概率, 若从未来的工作日里随机抽取 3 天 (假设每次抽取的结果互不影响), 记 X 为乙车间生产零件的个数超过甲车间的天数, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 从记录的这 10 个工作日中随机抽取 1 天, 用 “ $\xi = 0$ ” 表示甲车间生产的零件个数在区间 $[40, a)$ 内, 用 “ $\xi = 1$ ” 表示甲车间生产的零件个数在区间 $[a, 80]$ 内;

请写出一个实数 a 的值使得方差 $D\xi$ 取到最大值. (结论不需要证明)

20. (本小题 15 分)

设函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $l: y = g(x)$, 若函数 $f(x)$ 满足

$\forall x \in I$ (I 为函数 $f(x)$ 的定义域), 当 $x \neq x_0$ 时, $\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} < 0$ 恒成立, 则称 x_0 为

函数 $f(x)$ 的“ T 点”. 已知 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(I) 若直线 l 斜率为 $\frac{1}{4}$,

(i) 求 x_0 及直线 l 的方程;

(ii) 记 $F(x) = f(x) - g(x)$, 讨论函数 $F(x)$ 的单调性;

(II) 求证: 函数 $f(x)$ 有且只有一个“ T 点”.

21. (本小题 15 分)

已知 n 是正整数, 集合 $M_n = \{x \in \mathbf{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$. 若集合 $P \subseteq M_n$ 且 P 中元素个数为 k , 则称 P 是 M_n 的 k 元子集. 若 P 是 M_n 的一个 k 元子集, 且对任意 $x \in M_n$, 都存在 P 中若干个不同元素 a_1, a_2, \dots, a_l ($1 \leq l \leq k$), 满足 $x = a_1 + a_2 + \dots + a_l$, 则称 P 是 M_n 的 k 元基子集.

(I) 判断 $P = \{-3, -1, 1, 3\}$ 是否是 M_3 的 4 元基子集, 说明理由;

(II) 设 P 是 M_4 的 7 元子集, 判断 P 是否一定是 M_4 的 7 元基子集, 说明理由;

(III) 若 M_{10} 的任意 k 元子集均是 k 元基子集, 求 k 的最小值.