北京市朝阳区2023~2024学年度第二学期期末质量检测

高二数学参考答案　　2024．7

一、选择题（共10小题，每小题5分，共50分）

（1） B　（2） C　（3） D　（4） D　（5） A

（6） C　（7） C　（8） B　（9） A　（10） B

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（11） $(2,+\infty)$　（12） 1　（13） $n=6$， -20

（14） 10， $\dfrac{3}{10}$　（15） $f(x)=-x^2+1$ （答案不唯一）　（16）①③④

三、解答题（共5小题，共70分）

（17）（本小题12分）

解：（Ⅰ）当$t=4$时，

集合$A=\{x|-2<x<2\}$，

集合$B=\{x|x>2$或$x<1\}$.

则$A\cup B=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.　…………………………6分

（Ⅱ）若$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$.

由已知，集合A为非空集合，

则$t>0$.

则集合$A=\{x|-\sqrt{t}<x<\sqrt{t}\}$，

$B=\{x|x>2$或$x<1\}$.

则$\sqrt{t}\le 1$或$-\sqrt{t}\ge 2$（舍）.

所以t的取值范围是$\left(0,1\right]$. ······························12 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$. $f'(x)=a\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{e}^x$.

令$f'(x)=0$，则$x=1$或$x=-3$.

当$a>0$时，$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当$a<0$时，$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以当$a>0$时，

函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$，单调减区间为$(-3,1)$;

当$a<0$时，

函数$f(x)$的单调增区间为$(-3,1)$，单调减区间为$(-\infty,-3)$, $(1,+\infty)$.

······························ 10 分

（Ⅱ）

由（Ⅰ）可知当$a>0$时，$f(x)$的极小值为$f(1)=-2a\mathrm{e}=-2\mathrm{e}$，则$a=1$.

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(-3)=6a\mathrm{e}^{-3}=-2\mathrm{e}$，则 $a=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{4}$.

综上 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{4}$. ……………………………14 分

（19）（本小题 14 分）

（Ⅰ）设事件 A ="甲车间生产的零件个数小于 50"，

由数据可知甲车间在这 10 个工作日中有 2 个工作日生产零件个数小于 50，

则 $P(A)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………3 分

（Ⅱ）由题意可知，从未来的工作日里随机抽取 1 天，乙车间生产零件的个数超过甲车间的天数的概率可估计为 $\dfrac{1}{5}$.

X 的可能取值为 $0,1,2,3$.

所以 $P(X=0)$ 可估计为 $(1-\dfrac{1}{5})^3=\dfrac{64}{125}$，

$P(X=1)$ 可估计为 $C_3^1\times\dfrac{1}{5}\times(1-\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{48}{125}$，

$P(X=2)$ 可估计为 $C_3^2\times(\dfrac{1}{5})^2\times(1-\dfrac{1}{5})=\dfrac{12}{125}$，

$P(X=3)$ 可估计为 $(\dfrac{1}{5})^3=\dfrac{1}{125}$，

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

所以 $E(X)$ 可估计为 $0\times\dfrac{64}{125}+1\times\dfrac{48}{125}+2\times\dfrac{12}{125}+3\times\dfrac{1}{125}=\dfrac{3}{5}$. ……………… 11 分

（Ⅲ）$a=64$.（答案不唯一） ……………………………14 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）

（i）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

设曲线 $y=f(x)$ 上一点 P 的坐标为 $(x_0,\ln x_0+\frac{1}{x_0})$，

则 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{{x_0}^2}=\frac{1}{4}$，解得 $x_0=2$，则 $P(2,\ln 2+\frac{1}{2})$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y-(\ln 2+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(x-2)$，化简得，

直线 l 的方程 $y=\frac{1}{4}x+\ln 2$. ……………………………4 分

（ii）$F(x)=\ln x+\frac{1}{x}-(\frac{1}{4}x+\ln 2)$，函数 $F(x)$ 的定义域为

$(0,+\infty)$. $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}=\frac{-x^2+4x-4}{4x^2}=\frac{-(x-2)^2}{4x^2}\le 0$.

所以，函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………8 分

（Ⅱ）证明：

当 $x\ne x_0$ 时，$\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}<0$ 恒成立等价于 $x\in(0,x_0)$ 时 $f(x)>g(x)$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)<g(x)$.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，则 $l:y-(\ln x_0+\frac{1}{x_0})=(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{{x_0}^2})(x-x_0)$.

即 $l:y=\frac{x_0-1}{x_0^2}x+\ln x_0+\frac{2}{x_0}-1$.

设$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x)=\ln x+\frac{1}{x}-(\frac{x_0-1}{x_0^2}x+\ln x_0+\frac{2}{x_0}-1)$，

则$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{x_0-1}{x_0^2}$，化简得$F'(x)=\frac{-(x-x_0)\left[(x_0-1)x-x_0\right]}{x^2x_0^2}$，

（1）当$x_0=1$时，$F'(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

当$x>1$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，则$F(x)>F(1)=0$.

与“T 点”定义矛盾，不合题意.

（2）当$x_0\neq 1$时，令$x_0=\frac{x_0}{x_0-1}$，解得$x_0=2$.

①当$x_0=2$时，$\forall x\in(0,+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，

而$F(x_0)=0$，则当$x\in(0,x_0)$时，$F(x)>F(x_0)=0$，$f(x)>g(x)$；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$F(x)<F(x_0)=0$，$f(x)<g(x)$. 所以$x_0=2$是“T 点”.

②当$x_0\in(2,+\infty)$时，则当$x\in\left(0,\frac{x_0}{x_0-1}\right)$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{x_0}{x_0-1},x_0\right)$，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增.

则存在$x_1\in\left(\frac{x_0}{x_0-1},x_0\right)$，使得$F(x_1)<F(x_0)=0$, 这与“$T$ 点”的定义矛盾.

③当$x_0\in(1,2)$时，则当$x\in(0,x_0)$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；当$x\in\left(x_0,\frac{x_0}{x_0-1}\right)$，

$F'(x)>0$, $F(x)$单调递增.

则存在$x_2 \in \left(x_0, \dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$，使得$F(x_2) > F(x_0) = 0$，这与“$T$ 点”的定义矛盾.

④当$x_0 \in (0,1)$时，则当$x \in (0, x_0)$，$F'(x) < 0$，$F(x)$单调递减；$x \in (x_0, +\infty)$时，

$F'(x) > 0$，$F(x)$单调递增. 则存在$x_3 \in (x_0, +\infty)$，使得$F(x_3) > F(x_0) = 0$，这与“T 点”的定义矛盾.

所以函数$f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$有且只有一个“$T$ 点”． ··························15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$M_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

因为$P = \{-3, -1, 1, 3\}$，且$-2 = -3 + 1$，$0 = -1 + 1$，$2 = -1 + 3$，

所以$P = \{-3, -1, 1, 3\}$是M_3的 4 元基子集. ························4 分

（Ⅱ）P不一定是M_4的 7 元基子集．理由如下：

考虑$P = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$是$M_4$的 7 元子集，

因为$0 + 1 + 2 = 3 < 4$，所以$4 \in M_4$不能写成P中若干个不同元素之和，

所以$P = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$不是$M_4$的 7 元基子集.

······························8 分

（Ⅲ）当$k \leqslant 14$时，考虑集合M_{10}的k元子集$Q = \{-10, -9, -8, \cdots, -10 + k - 1\}$，

当$k \leqslant 11$时，Q中的元素均不是正数，

所以M_{10}中的正整数均不能表示为Q中若干个不同元素之和.

当$11 < k \leqslant 14$时，Q中所有正整数之和

$1 + 2 + \cdots + (k - 11) = \dfrac{(k-11)(k-10)}{2} \leqslant 6 < 10$，

所以$10\in M_{10}$不能表示为Q中若干个不同元素之和.

所以$k\geqslant 15$.

设$T_t=\{-t,t\}(1\leqslant t\leqslant 10)$，则$M_{10}=\{0\}\cup T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_{10}$.

任取M_{10}的15元子集P，因为$15>11$，所以$0\in P$或者存在t使得$T_t\subseteq P$.

所以0可表示为P中若干个不同元素之和.

由对称性，只需证明整数$l\in\{1,2,\cdots,10\}$均可表示为P中若干个不同元素之和.

设$A=P\cap\{1,2,\cdots,10\}=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}(a_1<a_2<\cdots<a_m)$.

因为P中最多包含11个非正数，所以$15-11=4\leqslant m\leqslant 10$.

下面证明$l,l+1,l+2,\cdots,l+10$这11个数中至少有$m-3$个数可表示为A中若干个不同元素之和.

①若$a_1,a_2,\cdots,a_m$中存在不小于l的数，设其中最小的一个为a_j，

则$l\leqslant a_j<a_{j+1}<\cdots<a_m<a_m+a_1<\cdots<a_m+a_{j-1}<l+10$，

所以$l,l+1,\cdots,l+10$中至少有$m\geqslant m-3$个数可表示为A中若干个不同元素之和.

②若$a_1<a_2<\cdots<a_m<l$，设在所有可表示为A中若干个不同元素之和的数中，

小于l的最大数为$a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_s}$，

则$\dfrac{s(s+1)}{2}\leqslant a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_s}\leqslant l-1<10$，所以$s(s+1)<20$，解得$s\leqslant 3$.

设$\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{m-s}}\}$（$i_1<i_2<\cdots<i_{m-s}$）是$\{a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_s}\}$在$A$中的补集，

则对于任意的$r\in\{1,2,\cdots,m-s\}$，均有$l\leqslant a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_s}+a_{i_r}<l+10$，

即$l,l+1,\cdots,l+10$中至少有$m-s\geqslant m-3$个数可表示为A中若干个不同元素之和.

设$B=\{-10,-9,-8,\cdots,0\}\cap P$，

$C=\{x\in\{-10,-9,-8\cdots,0\}\mid l-x\text{可表示为}A\text{中若干不同元素之和}\}$.

因为集合B的元素个数$|B|=15-m$，集合C的元素个数$|C|\geqslant m-3$，

又$|B\cup C|\leqslant 11$，

所以$|B\cap C|=|B|+|C|-|B\cup C|\geqslant 1$，即$B\cap C\neq\varnothing$.

设$x\in B\cap C$，则$l-x$可表示为A中若干个不同元素之和，

所以l可表示为P中若干个不同元素之和.

综上，k的最小值为15.　　　　……………………………15 分