

高二数学

2024.1

本试卷共5页,共150分.考试时长120分钟.考生务必将答案写在答题卡上,在试卷上作答无效.

第一部分(选择题共40分)

一、选择题共10小题,每小题4分,共40分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1.直线 $3x-4y+1=0$ 不经过()

- A.第一象限 B.第二象限
C.第三象限 D.第四象限

2.抛物线 $x^2=6y$ 的焦点到其准线的距离等于()

- A. $\frac{3}{2}$ B.3 C.6 D.8

3.在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中,点 $A(4,-2,8)$ 到平面 xOz 的距离与其到平面 yOz 的距离的比值等于()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C.2 D.4

4.在 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^3$ 的展开式中, x 的系数为()

- A.3 B.6 C.9 D.12

5.在正四面体 $ABCD$ 中,棱 AB 与底面 BCD 所成角的正弦值为()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6.已知直线 a,b 和平面 α ,且 $b\subset\alpha$,则“直线 $a\parallel$ 直线 b ”是“直线 $a\parallel$ 平面 α ”的()

- A.充分而不必要条件 B.必要而不充分条件
C.充分必要条件 D.既不充分也不必要条件

7.设 A,B 为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点, M 为双曲线 E 上一点,且 $\square AMB$

为等腰三角形,顶角为 120° ,则双曲线 E 的一条渐近线方程是()

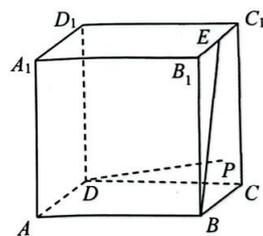
- A. $y=x$ B. $y=2x$
C. $y=\sqrt{2}x$ D. $y=\sqrt{3}x$

8.在正方体的8个顶点中任选3个,则这3个顶点恰好不在同一个表面正方形中的选法有()

- A.12种 B.24种 C.32种 D.36种

9.如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3,BC=CC_1=4,E$ 为棱 B_1C_1 的中点, P 为四边形 BCC_1B_1 内(含边界)的一个动点.且 $DP\perp BE$,则动点 P 的轨迹长度为()

- A.5
 B. $2\sqrt{5}$
 C. $4\sqrt{2}$
 D. $\sqrt{13}$



10. 在直角坐标系 xOy 内, 圆 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, 若直线 $l: x + y + m = 0$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后与圆 C 存在公共点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ B. $[-4 - \sqrt{2}, -4 + \sqrt{2}]$ C. $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$ D. $[-2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$

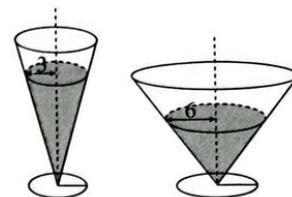
第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 过点 $A(2, -3)$ 且与直线 $x + y + 3 = 0$ 平行的直线方程为_____.

12. 在 $(2x+1)^4$ 的展开式中, 所有项的系数和等于_____. (用数字作答)

13. 两个顶点朝下竖直放置的圆锥形容器盛有体积相同的同种液体 (示意图如图所示), 液体表面圆的半径分别为 3, 6, 则窄口容器与宽口容器的液体高度的比值等于_____.



14. 若方程 $\frac{x^2}{m+2} + \frac{y^2}{4-m} = 1$ 表示的曲线为双曲线, 则实数 m 的取值范围是_____; 若此方程表示的曲线为椭圆, 则实数 m 的取值范围是_____.

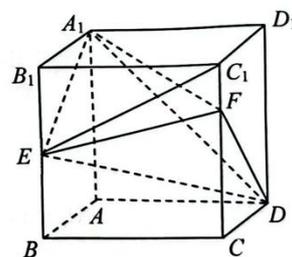
15. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, E 为棱 BB_1 的中点, F 为棱 CC_1 (含端点) 上的一个动点. 给出下列四个结论:

存在符合条件的点 F , 使得 $B_1F \parallel$ 平面 A_1ED ;

不存在符合条件的点 F , 使得 $BF \perp DE$;

异面直线 A_1D 与 EC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

三棱锥 $F - A_1DE$ 的体积的取值范围是 $[\frac{2}{3}, 2]$.



其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题 10 分)

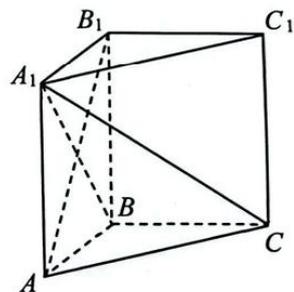
从 6 男 4 女共 10 名志愿者中, 选出 3 人参加社会实践活动.

(1) 共有多少种不同的选择方法?

(2) 若要求选出的 3 名志愿者中有 2 男 1 女, 且他们分别从事经济、文化和民生方面的问卷调查工作, 求共有多少种不同的选派方法?

17. (本小题 15 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BA \perp BC, BC = 3, AB = AA_1 = 4$.



(1) 证明: 直线 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC ;

(2) 求二面角 $B - CA_1 - A$ 的余弦值.

18. (本小题 15 分)

已知 $\odot C$ 经过点 $A(1,3)$ 和 $B(5,1)$, 且圆心 C 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上.

(1) 求 $\odot C$ 的方程;

(2) 设动直线 l 与 $\odot C$ 相切于点 M , 点 $N(8,0)$. 若点 P 在直线 l 上, 且 $|PM| = |PN|$, 求动点 P 的轨迹方程.

19. (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$, 四个顶点构成的四边形面积等于 12.

设圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 的圆心为 M , P 为此圆上一点.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 记线段 MP 与椭圆 C 的交点为 Q , 求 $|PQ|$ 的取值范围.

20. (本小题 15 分)

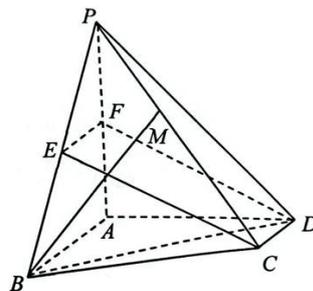
如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $AD \perp$ 平面 $PAB, AB \parallel DC, E$ 为棱 PB 的中点, 平面 DCE 与棱 PA 相交于点 F , 且 $PA = AB = AD = 2CD = 2$, 再从下列两个条件中选择一个作为已知.

条件 \square : $PB = BD$; 条件 \square : $PA \perp BC$.

(1) 求证: $AB \parallel EF$;

(2) 求点 P 到平面 $DCEF$ 的距离;

(3) 已知点 M 在棱 PC 上, 直线 BM 与平面 $DCEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$, 求 $\frac{PM}{PC}$ 的值.



21. (本小题 15 分)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两

点. 已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 判断 x 轴上是否存在一点 M , 对于任一条与两坐标轴都不垂直的弦 AB , 使得 MF_1 为 $\triangle AMB$ 的一条内角平分线? 若存在, 求点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.